XV. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Zenta, 2006. márc. 18-22.

11. osztály

1. feladat: Ha tudjuk, hogy $\cos x + \sin x = a$, akkor fejezzük ki a függvényeként az $S_3 = \cos^3 x + \sin^3 x$, illetve $S_4 = \cos^4 x + \sin^4 x$ összeget. Keressük meg az összefüggést az S_n, S_{n-1} és S_{n-2} összegek között, ha $S_n = \cos^n x + \sin^n x$, ahol n tetszőleges pozitív egész szám.

Péics Hajnalka (Szabadka)

2. feladat: Az $ABCD$ paralelogrammáról tudjuk, hogy $AC = 6$ cm, és $|DB| = |AD|$. Legfeljebb mekkora lehet a paralelogramma területe?

Katz Sándor (Bonyhád)

3. feladat: Adjuk meg a $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x} = \sqrt[4]{x^3}$ egyenlet összes olyan valós megoldását, amelyekre $x < 1$ teljesül.

Bíró Bálint (Eger)

4. feladat: Egy tetszőleges $\triangle_0$ háromszögbe beírjuk a $\triangle_1$ háromszöget úgy, hogy csúcsai az előbbi háromszögbe írt körvonal és a háromszög oldalainak érintési pontjai. A $\triangle_1$ háromszögbe beírjuk a $\triangle_2$ háromszöget ugyanilyen módon. Ezt az eljárást a $\triangle_7$ háromszög megszerkesztéséig folytatjuk. Bizonyítsuk be, hogy a $\triangle_7$ háromszög bármelyik szöge nagyobb $59°$-nál és kisebb $61°$-nál.

Neubauer Ferenc (Munkács)

5. feladat: Van n^2 darab egységnégyzetünk, ezekből egy $n \times n$-es nagyobb négyzetet raktunk össze. Legfeljebb hány kis négyzetet lehet elvenni úgy, hogy a megmaradó alakzat kerülete ugyanannyi legyen, mint a nagy négyzeté, de összefüggő maradjon a következő értelemben: az alakzat bármely kis négyzetének bármely belső pontjából bármely másik kis négyzet bármely belső pontjába el lehessen jutni olyan úton, amely teljes egészében az alakzathoz tartozik és nem halad át egyik kis négyzetcsúcson sem.

Urbán János (Budapest)

6. feladat: Hányféle módon lehet a természetes számokat pirossal és zölddel színezni úgy, hogy teljesüljenek a következő feltételek: a 6-os piros; létezik olyan természetes szám, amely zöld színű; bármely két különböző színű szám összege zöld, a szorzatuk pedig piros?

Szabó Magda (Szabadka)