XV. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Zenta, 2006. márc. 18-22.

11. osztály

1. feladat: Ha tudjuk, hogy $\cos x + \sin x = a$, akkor fejezzük ki a függvényeként az $S_3 = \cos^3 x + \sin^3 x$, illetve $S_4 = \cos^4 x + \sin^4 x$ összeget. Keressük meg az összefüggést az S_n, S_{n-1} és S_{n-2} összegek között, ha $S_n = \cos^n x + \sin^n x$, ahol n tetszőleges pozitív egész szám.

Péics Hajnalka (Szabadka)

1. feladat I. megoldása: A $\cos x + \sin x = a$ összefüggés mindkét oldalának négyzetre emeléséből adódik, hogy

$$\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x = a^2,$$

illetve ebből az, hogy

$$\sin x \cos x = \frac{a^2-1}{2}.$$

Továbbá,

$$S_3 = (\cos x + \sin x)^3 - 3\cos x \sin x(\cos x + \sin x) = a^3 - 3\frac{a^2-1}{2}a = \frac{-a^3+3a}{2}.$$

$$S_4 = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2\cdot\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 = \frac{-a^4+2a^2+1}{2}.$$

Végül pedig,

$$\cos^n x + \sin^n x = (\cos^{n-1} x + \sin^{n-1} x)(\cos x + \sin x) - \cos x \sin x(\cos^{n-2} x + \sin^{n-2} x)$$

miatt

$$S_n = S_{n-1}\cdot a - \frac{a^2-1}{2}\cdot S_{n-2}$$

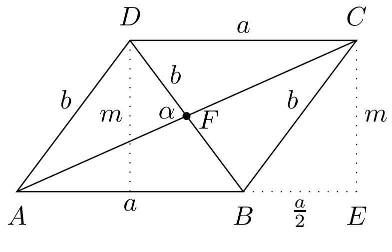
a keresett összefüggés.

---

2. feladat: Az $ABCD$ paralelogrammáról tudjuk, hogy $AC = 6$ cm, és $|DB| = |AD|$. Legfeljebb mekkora lehet a paralelogramma területe?

Katz Sándor (Bonyhád)

2. feladat I. megoldása: Legyen az átlók metszéspontja F, legyen $AD = DB = b$, és jelöljük az AFD szöget α-val, a paralelogramma területét T-vel!



Az AFD háromszögre koszinusz-tételt felírva: $b^2 = \frac{b^2}{4} + 9 - 3b\cos\alpha$. Ebből $\cos\alpha = \frac{12-b^2}{4b}$. Ebből $\sin^2\alpha = \frac{40b^2-b^4-144}{16b^2}$.

$$T^2 = \frac{AC^2 b^2 \sin^2\alpha}{4} = 9b^2\sin^2\alpha = \frac{9}{16}(40b^2 - b^4 - 144) = -\frac{9}{16}(b^2-20)^2 + 144 \leq 144.$$

Tehát T maximuma 12, ha $b = \sqrt{20}$.

2. feladat II. megoldása: Az AEC háromszögben $m^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = 6^2$. Ebből $m = \sqrt{\frac{144-9a^2}{4}}$.

$$T = a \cdot m = a \cdot \sqrt{\frac{144-9a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2(144-9a^2)}{4}} =$$

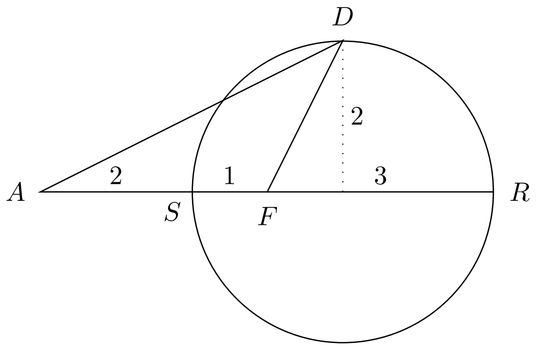
$$= \sqrt{\frac{9a^2(144-9a^2)}{36}} = \frac{\sqrt{9a^2(144-9a^2)}}{6}.$$

A számtani és mértani közép összefüggését használva adódik

$$T = \frac{\sqrt{9a^2(144-9a^2)}}{6} \le \frac{\frac{9a^2+(144-9a^2)}{2}}{6} = 12.$$

Tehát T maximuma 12, ha $9a^2 = 144 - 9a^2$, azaz $a = \sqrt{8}$ és $m = \sqrt{18}$.

2. feladat III. megoldása: $FD = \frac{b}{2}$, ezért $FD : AD = 1 : 2$.

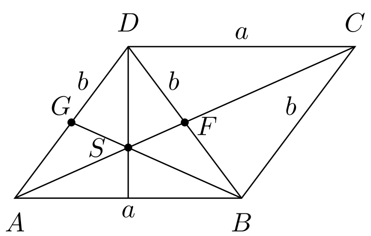


Ha az $AF = 3$ szakaszt rögzítjük, akkor D az AF szakaszhoz tartozó $1 : 2$ arányú Apollóniusz-körön helyezkedhet el, amely illeszkedik azokra az S és R pontokra, amelyekre $AS : SF = 2 : 1$, azaz $FS = 1$, és $AR : FR = 2 : 1$, azaz $FR = 3$.

Tehát a kör átmérője 4, sugara 2. Az AFD háromszögben $AF = 3$, ezért területe akkor a legnagyobb, ha magassága a legnagyobb, vagyis $m = 2$ esetén.

Ekkor $T_{AFD\triangle} = 3^2/2 = 3$. $T = 4T_{AFD\triangle} = 12$.

2. feladat IV. megoldása: Húzzuk be az ABD háromszög másik két súlyvonalát is! Mivel a háromszög egyenlő szárú, ezért $SA = SB = 2$.



Az ABS háromszög területe akkor a legnagyobb, ha a két súlyvonal merőleges egymásra, ekkor $T_{SBA\triangle} = 2^2/2 = 2$, viszont

$$T_{SBA\triangle} = \frac{1}{3} T_{ABD\triangle} = \frac{1}{6} T.$$

Tehát T maximuma 12, ha az ABD háromszög s_a és s_b súlyvonalai merőlegesek egymásra.

---

3. feladat: Adjuk meg a $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{x}=\sqrt[4]{x^3}$ egyenlet összes olyan valós megoldását, amelyekre $x<1$ teljesül.

Bíró Bálint (Eger)

3. feladat I. megoldása: A négyzetgyök értelmezése miatt $x \geq 0$. Az $x=0$ nyilvánvalóan gyöke az egyenletnek, ez megfelel az $x<1$ feltételnek is. Legyen most $\sqrt[8]{x}=a$, ezzel $\sqrt{x}=a^4$, $\sqrt[4]{x}=a^2$ és $\sqrt[4]{x^3}=a^6$. Ezzel a jelöléssel:

$$a^4+a^2+a=a^6,$$

azaz

$$a(a^3+a+1)=a^6. \tag{1}$$

Mivel $a=0$ esetén $x=0$ lehet csak, és azt az esetet már vizsgáltuk, ezért a továbbiakban $x \neq 0$ és így $a \neq 0$. Ekkor viszont (1) helyett az

$$a^3+a+1=a^5 \tag{2}$$

egyenletet kapjuk. (2) átalakítható:

$$\begin{aligned} a+1 &= a^3 \cdot (a^2-1) \\ a+1 &= a^3 \cdot (a+1)(a-1). \end{aligned}$$

Mivel $x>0$ miatt most $a>0$, ezért $a+1 \neq 0$, s így

$$a^3 \cdot (a-1)=1,$$

vagyis

$$a^4-a^3=1,$$

tehát

$$a^4=a^3+1. \tag{3}$$

Osszuk el (4) mindkét oldalát 2-vel!

$$\frac{a^4}{2}=\frac{a^3+1}{2}. \tag{4}$$

Alkalmazva az a^3 és 1 számokra a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{a^4}{2}=\frac{a^3+1}{2} \geq \sqrt{a^3},$$

ahonnan

$$\frac{a^8}{4} \geq a^3,$$

majd a pozitív a^3-el való osztás után:

$$a^5 \geq 4,$$

ezután pedig $a \geq \sqrt[5]{4}$ következik. Ez azt jelenti, hogy $\sqrt[8]{x} \geq \sqrt[5]{4}$, azaz $\sqrt[40]{x^5} \geq \sqrt[40]{4^8}$, és ezért $x^5 \geq 2^{16}$ teljesül. Eszerint: $x \geq 8 \cdot \sqrt[5]{2}$, ugyanakkor $\sqrt[5]{2}>1$, és $x \geq 8$, ez azonban ellentmond $x<1$-nek.

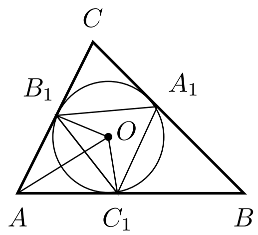
Eszerint feltételeink mellett a kiinduló egyenletnek egyetlen megoldása van, mégpedig $x=0$.

---

4. feladat: Egy tetszőleges $\triangle_0$ háromszögbe beírjuk a $\triangle_1$ háromszöget úgy, hogy csúcsai az előbbi háromszögbe írt körvonal és a háromszög oldalainak érintési pontjai. A $\triangle_1$ háromszögbe beírjuk a $\triangle_2$ háromszöget ugyanilyen módon. Ezt az eljárást a $\triangle_7$ háromszög megszerkesztéséig folytatjuk. Bizonyítsuk be, hogy a $\triangle_7$ háromszög bármelyik szöge nagyobb 59°-nál és kisebb 61°-nál.

Neubauer Ferenc (Munkács)

4. feladat I. megoldása: Legyen ABC az adott háromszög, O a beírt kör középpontja, $A_1B_1C_1$ az első beírt háromszög. Akkor AB_1OC_1 négyszög húrnégyszög, mivel B_1 és C_1 szögeinek összege $180°$, ezért



$B_1OC_1\angle = 180°-A\angle$.
Ezért $B_1A_1C_1\angle = A1\angle = 0,5B_1OC_1\angle = 90° - 0,5A\angle$. Hasonlóképpen $A_{i+1}\angle = 90° - 0,5A_i\angle$, ahol $i = 1, 2, \ldots, 6$. Ha

$$60° - \varepsilon < A\angle < 60° + \varepsilon, \tag{5}$$

akkor A_1 szögre igaz a következő egyenlőtlenség:

$$30° - \frac{\varepsilon}{2} < 0,5A\angle < 30° + \frac{\varepsilon}{2} \iff -30° - \frac{\varepsilon}{2} < -0,5A\angle < -30° + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$60° - \frac{\varepsilon}{2} < 90° - 0,5A\angle < 60° + \frac{\varepsilon}{2} \iff 60° - \frac{\varepsilon}{2} < A_1\angle < 60° + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ebben az esetben viszont az A_i szögek mindegyikére igaz: $60° - \frac{\varepsilon}{2^i} < A_i\angle < 60° + \frac{\varepsilon}{2^i}$, ahol $i = 1, 2, \ldots, 7$. Tehát

$$60° - \frac{\varepsilon}{2^7} < A_7\angle < 60° + \frac{\varepsilon}{2^7}.$$

Mivel az (1) egyenlőtlenség teljesül a $\triangle_0$ háromszögre $\varepsilon = 120°$ esetében, ezért a $\triangle_7$ háromszögre kapjuk:

$$60° - \frac{120°}{2^7} < A_7\angle < 60° + \frac{120°}{2^7} \iff 60° - \frac{120°}{128} < A_7\angle < 60° + \frac{120°}{128} \iff 59° < A_7\angle < 61°.$$

Nyilvánvaló, hogy a B_7 és C_7 szögekre ugyanez az értékelés érvényes.

4. feladat II. megoldása:
Lépésenként kifejezzük az A_i $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ szögeket az $A\angle$ segítségével:

$$\begin{aligned}
A_1\angle &= 90° - 0,5A\angle;\\
A_2\angle &= 90° - 0,5A_1\angle = 90° - 0,5(90° - 0,5A\angle) = 45° + 0,5^2A\angle;\\
A_3\angle &= 67,5° - 0,5^3A\angle;\\
A_4\angle &= 56,25° + 0,5^4A\angle;\\
A_5\angle &= 61,875° - 0,5^5A\angle;\\
A_6\angle &= 59,0625° + 0,5^6A\angle;\\
A_7\angle &= 60,46875° - 0,5^7A\angle.
\end{aligned}$$

Mivel $0° < A\angle < 180°$, ezért $0° < 0,5^7A\angle < 1,40625° \iff -1,40625° < -0,5^7A\angle < 0° \iff 59,0625° < A_7\angle < 60,46875° \iff 59° < A_7\angle < 61°$.

---

5. feladat: Van n^2 darab egységnégyzetünk, ezekből egy $n \times n$-es nagyobb négyzetet raktunk össze. Legfeljebb hány kis négyzetet lehet elvenni úgy, hogy a megmaradó alakzat kerülete ugyanannyi legyen, mint a nagy négyzeté, de összefüggő maradjon a következő értelemben: az alakzat bármely kis négyzetének bármely belső pontjából bármely másik kis négyzet bármely belső pontjába el lehessen jutni olyan úton, amely teljes egészében az alakzathoz tartozik és nem halad át egyik kis négyzetcsúcson sem.

Urbán János (Budapest)

5. feladat I. megoldása: Az n^2 darab kis négyzetből $(n-1)^2$ darabot el lehet venni, például úgy, hogy a bal oldali oszlop és az alsó sor megmaradjon.

Így $2n-1$ kis négyzet maradt.

$2n-2$ kis négyzet már kevés, mert az összefüggőség miatt a $4(2n-2)=8n-8$ összkerületből a csatlakozások miatt $2(2n-3)=4n-6$-ot kell levonni, így az alakzat kerületére csak $4n-2$ marad.

---

6. feladat: Hányféle módon lehet a természetes számokat pirossal és zölddel színezni úgy, hogy teljesüljenek a következő feltételek: a 6-os piros; létezik olyan természetes szám, amely zöld színű; bármely két különböző színű szám összege zöld, a szorzatuk pedig piros?

Szabó Magda (Szabadka)

6. feladat I. megoldása: A harmadik feltétel ekvivalens a következő állítással: minden piros szám osztható valamilyen egynél nagyobb számmal. A jobbról balra terjedő implikáció direkt közvetkezik, tehát csupán a balról jobbra történő következtetést kell igazolni.

Legyen az n a legkisebb piros szám és a feltétel alapján minden kn is piros, tetszőleges k természetes szám esetén. Bizonyítani kell, hogy más fajta számok nem léteznek és ezt indirekt úton tesszük. Tegyük fel az ellenkezőjét, vagyis hogy van olyan piros m szám, amely $qn+r$ alakú $(0<r<n)$. A qn piros, ezért az r is piros, hiszen ellenkező esetben, qn piros voltából és abból, hogy r zöld, az összegnek is zöldnek kell lenni. Tehát ellentmondáshoz jutottunk, mert a feltétel alapján n a legkisebb piros szám.

Ezután levonhatjuk a következtetést, hogy háromféle színezés lehetséges:

1. A pirosak a páros számok, míg a zöldek a páratlanok.
2. A pirosak a hárommal osztható számok, míg a többi szám zöld.
3. A pirosak a hattal osztható számok, míg a többiek a zöldek.