XV. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Zenta, 2006. márc. 18-22.

10. osztály

1. feladat: Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok körében ($a \in \mathbb{R}$, $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$):

$$\sqrt[3]{\frac{2+x}{x}} - \sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}} = 1.$$

Pintér Ferenc (Nagykanizsa)

2. feladat: Az ABC háromszögben $AC = BC$, a BC, CA, AB oldalakat a beírt kör rendre az A', B', C' pontokban érinti. Az AA' szakasz a beírt kört D-ben, a $B'D$ egyenes az AB oldalt E-ben metszi. Mutassuk meg, hogy $AE{=}EC'$.

Katz Sándor (Bonyhád)

3. feladat: Legyen $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2005} + 3^{2006}$ és $B = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2005} + 2^{2006}$. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan C pozitív egész szám, amelyre $B^2 + C^2 = A^2$.

Bíró Bálint (Eger)

4. feladat: Az $ABCD$ négyzet AB oldalán legyen E az A-hoz közelebbi harmadoló pont, F a CD oldal felezőpontja. Az ED, illetve BF egyenesek messék az AC átlót az M, illetve az N pontban. Hasonlók lesznek-e az AEM és a CNF háromszögek? Indokoljuk.

Kántor Sándorné és Sípos Elvira (Debrecen illetve Zenta)

5. feladat: Ha az adott a_1, a_2, a_3 valós számokra és $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ számokra fennáll az $1 \leq \frac{a_i}{b_i} \leq 2$ $(i = 1, 2, 3)$ egyenlőtlenség, akkor bizonyítsuk be, hogy

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \leq 3(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3).$$

Szabó Magda (Szabadka)

6. feladat: Vonalas füzetünkben a szomszédos egyenesek távolsága 1 egység. Létezik-e olyan téglalap, amely oldalainak hossza egész és csúcsai négy különböző vonalra illeszkednek?

Bogdán Zoltán (Cegléd)