XV. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Zenta, 2006. márc. 18-22.

10. osztály

1. feladat: Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok körében ($a \in \mathbb{R}$, $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$):

$$\sqrt[3]{\frac{2+x}{x}} - \sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}} = 1.$$

Pintér Ferenc (Nagykanizsa)

1. feladat I. megoldása: Végezzük el az alábbi átalakítást:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\frac{2+x}{x}} - \sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}} &= 1\\ \sqrt[3]{\frac{2}{x}+1} - \sqrt[3]{\frac{2}{x}-6} &= 1.\end{aligned}$$

Vezessünk be új változót, például legyen $y = \frac{2}{x} - 6$, s ekkor a

$$\sqrt[3]{y+7} - \sqrt[3]{y} = 1$$

egyenlethez jutunk. Emeljük köbre a kapott egyenletet a következő azonosság alapján: $(a-b)^3 = a^3 - b^3 + 3ab(a-b)$, és használjuk fel, hogy jelen esetben $a - b = 1$. Ekkor a következőt kapjuk:

$$y + 7 - y - 3\sqrt[3]{(y+7)y} \cdot 1 = 1,$$

rendezve

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{y^2+7y} &= 2\\ y^2 + 7y - 8 &= 0\\ y_1 = 1 \text{ és } y_2 &= -8.\end{aligned}$$

Visszahelyettesítve x-re a következőt kapjuk:

$$x_1 = \frac{2}{7}, x_2 = -1.$$

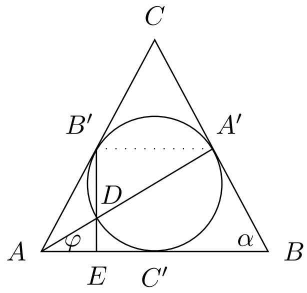
Ellenőrzéssel beláthatjuk, hogy mindkét gyök kielégíti az eredeti egyenletet.

---

2. feladat: Az ABC háromszögben $AC = BC$, a BC, CA, AB oldalakat a beírt kör rendre az A', B', C' pontokban érinti. Az AA' szakasz a beírt kört D-ben, a $B'D$ egyenes az AB oldalt E-ben metszi. Mutassuk meg, hogy AE=EC' .

Katz Sándor (Bonyhád)

2. feladat I. megoldása: Jelöljük az ABC háromszög alapon fekvő szögeit α-val, az $A'AB$ szöget φ-vel.



Szimmetria miatt $A'B' \| AB$, ezért $DA'B'\angle = \varphi$.

$DA'B'$ a DB' ívhez tartozó kerületi szög, ugyanezen ívhez tartozó érintőszárú kerületi szög az $AB'D$ szög. Így $AB'D\angle = \varphi$.

$AB'ED \sim ABA'D$, mert megegyeznek két szögben (α és φ). B-ből és szimmetria miatt A-ból a körhöz húzott érintő szakaszok egyenlők, ezért $A'B : AB = 1 : 2$. A hasonlóság miatt $AE : AB' = 1 : 2$, tehát $AE = AC'/2$.

---

3. feladat: Legyen $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2005} + 3^{2006}$ és $B = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2005} + 2^{2006}$. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan C pozitív egész szám, amelyre $B^2 + C^2 = A^2$.

Bíró Bálint (Eger)

3. feladat I. megoldása: Ismeretes, hogy a 2 pozitív egész kitevőjű hatványainak utolsó számjegyeiből álló sorozat periodikus, mégpedig ez a periódus a $2; 4; 8; 6$ számokból áll. Hasonlóképpen periodikus a 3 pozitív egész kitevőjű hatványainak utolsó számjegyeiből álló sorozat is, ez a periódus: $3; 9; 7; 1$.

Ha egy-egy perióduson belül összeadjuk a 2 hatványait, akkor látható, hogy az így kapott szám 0-ra végződik. Ugyancsak 0-ra végződik egy perióduson belül a 3 hatványainak összege is. Mivel $2006 = 4 \cdot 501 + 2$, ezért A utolsó számjegyét az egy perióduson belüli első két számjegy összege dönti el. Eszerint A utolsó számjegye 2. Hasonlóan kapjuk, hogy B utolsó számjegye 6. Mindebből következik, hogy A^2 és B^2 utolsó számjegyei 4 illetve 6.

Ha létezne olyan C egész szám, amelyre a feltétel szerint $B^2 + C^2 = A^2$ teljesülne, akkor az előzőek szerint C^2 utolsó számjegye 8 volna, hiszen ekkor $C^2 = A^2 - B^2$ is igaz lenne. De C^2 négyzetszám és a négyzetszámok végződése nem lehet 8 .

Ezzel beláttuk, hogy nincs olyan C pozitív egész szám, amelyre $B^2 + C^2 = A^2$.

Megjegyzés: ezzel azt is bebizonyítottuk, hogy nincs olyan egész szám oldalhosszúságú derékszögű háromszög, amelynek egyik befogója B, átfogója pedig A.

---

4. feladat: Az $ABCD$ négyzet AB oldalán legyen E az A-hoz közelebbi harmadoló pont, F a CD oldal felezőpontja. Az ED, illetve BF egyenesek messék az AC átlót az M, illetve az N pontban. Hasonlók lesznek-e az AEM és a CNF háromszögek? Indokoljuk.

Kántor Sándorné és Sípos Elvira (Debrecen illetve Zenta)

4. feladat I. megoldása: Az AEM és a CNF háromszögben $EAM\angle = FCN\angle = 45°$, valamint az AEM és MDC háromszögek hasonlóak. Így $|AB| : |AC| = \sqrt{2} : 2$, $|AM| : |MC| = |AE| : |CD| = 1 : 3$, ezért $|AE| : |AM| = 1/3|AB| : 1/4|AC| = 2\sqrt{2}/3$.

Másrészt $|CN| : |NA| = |CF| : |AB| = 1 : 2$ és $|CN| : |CF| = 1/3|AC| : 1/2|AB| = 2\sqrt{2}/3$.

$|AE| : |AM| = |CN| : |CF|$, amiből következik az AEM és a CNF háromszögek hasonlók (két oldal aránya és a közbezárt szög megegyezik).

4. feladat II. megoldása: Az AEM és a CNF háromszögben $EAM\angle = FCN\angle = 45°$.

$\operatorname{tg} AEM\angle = 3$, $\operatorname{tg} CFN\angle = 2$, $AME\angle = 180° - 45° - AEM\angle$,

$\operatorname{tg} AME\angle = -\operatorname{tg}(45° + AEM\angle) = -\frac{1+3}{1-3} = 2$. Ezért $AME\angle = CFN\angle$, tehát az AEM és a CNF háromszögek hasonlók (két-két szögük megegyezik).

5. feladat: Ha az adott a_1, a_2, a_3 valós számokra és $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ számokra fennáll az $1 \leq \frac{a_i}{b_i} \leq 2$ $(i = 1, 2, 3)$ egyenlőtlenség, akkor bizonyítsuk be, hogy

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \leq 3(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3).$$

Szabó Magda (Szabadka)

5. feladat I. megoldása: Az $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ egyenlőtlenség az $x \in [1, 2]$ esetén teljesül, tehát az $i = 1, 2, 3$ értékeire teljesülnek a következő egyenlőtleségek:

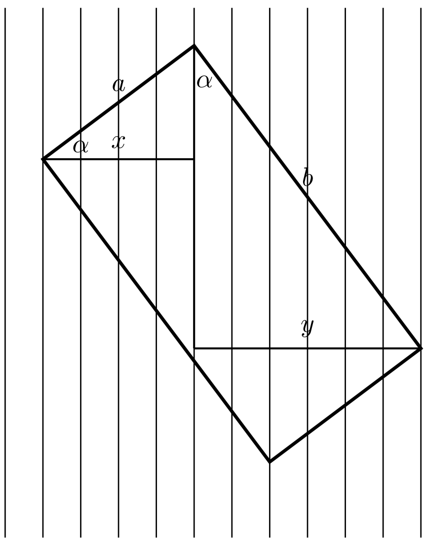
$$\left(\frac{a_i}{b_i}\right)^2 - 3\frac{a_i}{b_i} + 2 \leq 0,$$

amelynek átalakításával $a_i^2 + 2b_i^2 \leq 3a_i b_i$ az $i = 1, 2, 3$ értékeire, és ezen egyenlőtlenségek összeadása eredményezi a bizonyítandó egyenlőtlenséget.

6. feladat: Vonalas füzetünkben a szomszédos egyenesek távolsága 1 egység. Létezik-e olyan téglalap, amely oldalainak hossza egész és csúcsai négy különböző vonalra illeszkednek?

Bogdán Zoltán (Cegléd)

6. feladat I. megoldása: Az ábrán x, y egész, a két, α szöget tartalmazó derékszögű háromszög hasonló. Az $\frac{x}{a} = \cos\alpha$ és $\frac{y}{b} = \sin\alpha$ összefüggés-ben α-t úgy kell megválasztani, hogy $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$ racionális legyen.



Ekkor a és b is racionális. Ha legalább egyik nem egész, akkor az a és b számokat közös nevezőre hozva, a nevezőnek megfelelő arányú C középpontú középpontos hasonlósággal a téglalapot felnagyítva egy kívánt megoldást kapunk. Meg kell mutatni, hogy van olyan α, amelyre $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ racionális. Ilyen például a $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, a 3, 4, 5 pitagoraszi számhármasból. Elképzelhető olyan megoldás is, hogy valamely pitagoraszi számhármasból spekulatív úton ad valaki megoldást (például egy 5 egység oldalán négyzetet).