XV. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Zenta, 2006. márc. 18-22.

9. osztály

1. feladat: Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan négyzetszám van, amely felírható a 2 két nemnegatív egész kitevőjű hatványának összegeként. Igaz-e a megfelelő állítás a 3 hatványaira is?

Urbán János (Budapest)

1. feladat I. megoldása: $2^0 + 2^3 = 9$, és tetszőleges $n \geq 1$ egészre $2^{2n} + 2^{2n+3} = 2^{2n} \cdot 9 = (2^n \cdot 3)^2$. $3^2 + 3^3 = 9 + 27 = 36 = 6^2$, és tetszőleges $n \geq 1$ egészre $3^{2n+2} + 3^{2n+3} = 3^{2n}(3^2 + 3^3) = (3^n \cdot 6)^2$, tehát a megfelelő állítás a 3 hatványaira is igaz.

---

2. feladat: A nyáron egy kis faluban volt az osztály kirándulni. Az egyetlen bolt árukészlete minden reggel ugyanaz volt. Mi voltunk az első vásárlók és a kiflik felét, a zsemlék negyedét, a tej egyötödét elvittük, és ezért 1800 Ft-ot fizettünk. Másnap az előző napival azonos árukészletből a kifliknek és a zsemléknek is a harmadát, a tejnek negyedét vittük el, és most 1500 Ft-ot fizettünk. Harmadnap megint másként rendeltek az osztálytársak, és most a kiflik hatodát, a zsemlék öt tizenketted részét, a tejnek három tized részét vittük el. Mennyit fizettünk a harmadik napon?

Katz Sándor (Bonyhád)

2. feladat I. megoldása: Ha a kiflik, a zsemlék és a tej teljes napi árukészletének árát k, z és t betűkkel jelöljük, akkor

$$\begin{aligned} \frac{k}{2} + \frac{z}{4} + \frac{t}{5} &= 1800, \\ \frac{k}{3} + \frac{z}{3} + \frac{t}{4} &= 1500. \end{aligned}$$

Arra vagyunk kíváncsiak, mennyi $\frac{k}{6} + \frac{5z}{12} + \frac{3t}{10}$ értéke.

Az első két feltételből közvetlenül nem tudjuk meghatározni k, z és t értékét. Azonban látható, hogy ha a második kétszereséből kivonjuk az elsőt, akkor a harmadikat kapjuk. Valóban: $\frac{2k}{3} - \frac{k}{2} = \frac{k}{6}$, $\frac{2z}{3} - \frac{z}{4} = \frac{5z}{12}$, $\frac{2t}{4} - \frac{t}{5} = \frac{3t}{10}$.

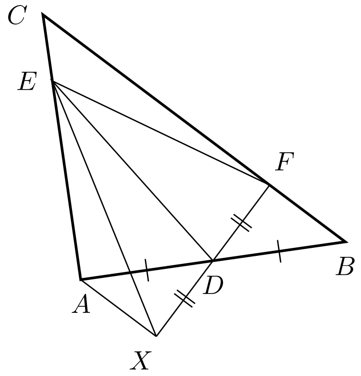
Eszerint a harmadik napon $2 \cdot 1500 - 1800 = 1200$ Ft-ot fizettünk.

---

3. feladat: Az ABC háromszögben D az AB oldal felezőpontja, E az AC oldal, F pedig a BC oldal egy-egy tetszőleges pontja. Bizonyítsuk be, hogy a DEF háromszög területe kisebb az AED és BFD háromszögek területeinek összegénél.

Neubauer Ferenc (Munkács)

3. feladat I. megoldása: Szerkesszünk az FD egyenes meghosszabbítására X pontot úgy, hogy $DX = DF$ teljesüljön. Ekkor a DEF háromszög területe egyenlő lesz a DEX háromszög területével.



Az AXD és BFD háromszögek egybevágóak két oldal és a közbezárt szög egyenlősége alapján, ezért szintén egyenlő területűek. Az EAXD négyszög mindig konvex, mivel $EAX\angle = EAB\angle + BAX\angle = CAB\angle + ABC\angle < 180°$. Így a DEX háromszög területe mindig kisebb a $DEAX$ négyszög területénél, ami viszont pontosan az AED és AXD, vagyis a BFD háromszögek területeinek összegével azonos. Az állítás bizonyított.

---

4. feladat: Legyen egy háromszög oldalainak hossza rendre a, b, illetve c. Igazoljuk, hogy ha

$$\left(a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{5}\right)^2 = 10(a^2 + b^2 + c^2),$$

akkor a háromszög derékszögű.

Kovács Béla (Szatmárnémeti)

4. feladat I. megoldása: Végezzük el a feltételi egyenletben a műveleteket és alakítsunk át ekvivalensen:

$$\begin{aligned}
2a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 2\sqrt{6}ab + 2\sqrt{10}ac + 2\sqrt{15}bc &= 10a^2 + 10b^2 + 10c^2 \\
8a^2 + 7b^2 + 5c^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{3}ab - 2\sqrt{2}\sqrt{5}ac - 2\sqrt{3}\sqrt{5}bc &= 0 \\
\left(a\sqrt{3} - b\sqrt{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{5} - c\sqrt{2}\right)^2 + \left(b\sqrt{5} - c\sqrt{3}\right)^2 &= 0 \iff \tfrac{a}{\sqrt{2}} = \tfrac{b}{\sqrt{3}} = \tfrac{c}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

Eszerint a háromszögünk hasonló a $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ oldalhosszúságú háromszöghöz, amely Pitagorasz tételének megfordítása alapján derékszögű. Így tehát valóban derékszögű lesz a háromszög.

---

5. feladat: Adott a síkban 2006 pont úgy, hogy bármely három által meghatározott háromszög területe legfeljebb 1 egység. Bizonyítsuk be, hogy ezek a pontok lefedhetők egy 4 egységnyi területű háromszöggel.

Óváriné Csabai Mária (Kecskemét)

5. feladat I. megoldása: A pontok véges sok háromszöget határoznak meg, tehát van köztük maximális területű, jelöljük ezt ABC-vel! Húzzunk mindhárom csúcsán át párhuzamost a szemközti oldallal, A-n át a-t, B-n át b-t, C-n át c-t! Az a egyenesnek a BC-vel szemközti oldalán nem lehet pont, mivel az a B és C pontokkal ABC-nél nagyobb területű háromszöget alkotna. Hasonló állítás lesz igaz a másik két egyenesre is, tehát az összes pont az a, b és c egyenesek által határolt síktartományban fog elhelyezkedni, ennek területe viszont az ABC háromszög területének négyszerese lesz, vagyis legfeljebb 4 egység, ezt a síktartományt tehát le tudjuk fedni egy legfeljebb 4 egység területű háromszöggel, és minden pont benne lesz. Ezzel a feladatot megoldottuk.

6. feladat: Jancsi egy 6×7-es négyzetrács valamelyik mezejére gondolt. Peti szeretné kitalálni, hogy melyik mezőre. Peti rámutat egy mezőre, majd Jancsi a következő válaszok valamelyikét mondja: forró, meleg, langyos, hideg. A válaszadás szabálya a következő: Jancsi forrót mond, ha Peti eltalálta a gondolt mezőt, meleget mond, ha a gondolt mezővel élben szomszédosra mutatott Peti, langyost mond, ha csúcsban szomszédosra mutatott. Végül hideget mond, ha a gondolt és a mutatott mezőnek nincs közös pontja. Ha Peti ügyesen kérdez, akkor legrosszabb esetben hány mutatásra lehet szüksége, hogy ki tudja találni a gondolt mezőt?

Kiss Sándor (Nyíregyháza)

6. feladat I. megoldása: A tábla 42 mezőből áll. Ha Peti rámutat egy mezőre, azzal arról a mezőről és a körülötte lévő nyolcról kaphatunk közvetlen információt. A legrosszabb esetben egy mező kivételével mindegyikről kell közvetlen információt kapnunk (esetleg jó taktikával el lehet érni, hogy kizárásos módszerrel csak 41 mezőre kérdezzünk rá). Ez azt jelenti, hogy legalább 6 kérdést föl kell tennünk a legrosszabb esetben, mivel 4 kérdéssel 36 mezőről szerezhet Peti információt, a kimaradó 6 mezőnek viszont akármilyen elhelyezkedése esetén elképzelhető, hogy 2 rámutatásra van szükségünk ahhoz, hogy kitaláljuk, melyik mezőre gondolt Jancsi.

6 rámutatás viszont biztosan elegendő lesz, mivel ha a táblázatból ”levágjuk” a jobb oldali oszlopot és a megmaradt 6×6-os táblázatot négy db 3×3-as részre osztjuk. Ezek középső mezőjére mutatva Peti megtudhatja, a 3×3-as négyzetben van-e a gondolt mező. Ha igen, akkor vagy a középső mező az, ekkor megtalálta, vagy valamelyik másik, ekkor a választól függően négy lehetősége maradt: a négy sarokmező vagy a négy oldal középső mezője. Mindkét esetben valamelyik oldal középső mezőjére mutatva két lehetőség kiejthető, a maradék kettőből pedig egy rámutatással Peti megtalálhatja az igazit, ez legfeljebb $4 + 2 = 6$ rámutatás.

Ha a 3×3-as táblázatok mindegyikében ”hideg” választ kap, akkor a gondolt mező a ”levágott” oszlopban van. Ennek két középső mezője közül mutasson rá Peti az egyikre! Ha ”meleg” vagy ”forró” választ kap, legfeljebb két lehetőség maradt, ezekből egyetlen rámutatással bizonyosságra juthat. Ha a válasz ”hideg”, az oszlop egyik végén 1 mező marad ki, a másikon kettő. E közül a kettő közül valamelyikre rámutatva egyértelműen meg tudja mondani, hogy melyik volt a gondolt mező: ”forró” válasz esetén az, amire mutatott, ”meleg”-nél a szomszédos, ”hideg”-nél pedig a harmadik kimaradt mező. Láthatóan ebben az esetben is legfeljebb 6 mezőre kellett rámutatnia. Ez pedig azt jelenti, hogy a válaszhoz legfeljebb 6 mezőre kell rámutatnia Petinek, és ez a szám tovább már nem csökkenthető.