XIV. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Miskolc, 2005. márc. 20-23.

12. osztály

1. feladat: Hány megoldása van az egész számok körében az $x^2 + y^2 = 3(u^2 + v^2)$ egyenletnek?

Szabó Magda (Szabadka)

2. feladat: A 100 oldalú K konvex sokszög az 1 méter oldalú négyzet belsejében fekszik. Mutassuk meg, hogy K csúcsai közül kiválasztható három úgy, hogy az általuk meghatározott háromszög területe kisebb, mint 8 cm^2.

Bencze Mihály (Brassó)

3. feladat: Az a_n sorozatot a következő módon definiáljuk:

$$a_1 = 1, \quad a_n = \frac{n+1}{n-1}(a_1 + a_2 + \dots a_{n-1}), \text{ ha } n > 1.$$

Határozzuk meg a_{2005} értékét!

Péics Hajnalka (Szabadka)

4. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben az a és a b oldalakhoz tartozó súlyvonalak merőlegesek egymásra, akkor

$$5(a^2 + b^2 + c^2) \geq 8ab,$$

ahol c a háromszög harmadik oldala.

Oláh György (Komárom)

5. feladat: Igazoljuk, hogy az

$$x^5 - 10x^4 + 10x^3 - 20x^2 + 5x - 2 = 0$$

egyenlet egyetlen valós gyöke $x = 2 + \sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{9} + \sqrt[5]{27} + \sqrt[5]{81}$.

Kovács Béla (Szatmárnémeti)

6. feladat: Mutassuk meg, hogy minden pozitív egész n esetén fennállnak a

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\binom{n+1}{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\binom{n}{k}} \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\binom{n}{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^{n-k}} \quad (2)$$

azonosságok.

Dályai Pál Péter (Szeged)