XIV. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Miskolc, 2005. márc. 20-23.

12. osztály

1. feladat: Hány megoldása van az egész számok körében az $x^2 + y^2 = 3(u^2 + v^2)$ egyenletnek?

Szabó Magda (Szabadka)

1. feladat I. megoldása: Csak egy megoldás van még pedig a $(0, 0, 0, 0)$, mert az egész számok négyzetének 3-mal vett osztási maradéka 0 és 1 lehet, ezért az $x^2 + y^2$ csak akkor lehetne hárommal osztható szám, ha az x és az y is hárommal osztható szám, tehát

$$x = 3x_1,\ y = 3y_1, \text{ vagyis } u^2 + v^2 = 3\left(x_1^2 + y_1^2\right),$$

akkor pedig

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{3}\left(x^2 + y^2\right) < \left(x^2 + y^2\right).$$

---

2. feladat: A 100 oldalú K konvex sokszög az 1 méter oldalú négyzet belsejében fekszik. Mutassuk meg, hogy K csúcsai közül kiválasztható három úgy, hogy az általuk meghatározott háromszög területe kisebb, mint 8 cm^2.

Bencze Mihály (Brassó)

2. feladat I. megoldása: Mivel a sokszög benne van a négyzetben, kerülete legfeljebb 400-zal egyenlő. Legyenek A_1, A_2, …, A_{100} a sokszög csúcsai. Tekintsük az $A_1A_2 + A_2A_3$; $A_2A_3 + A_3A_4$; …; $A_{99}A_{100} + A_{100}A_1$ számokat. Ezen 100 számnak az összege a sokszög területének a kétszerese, tehát ≤ 800. A Dirichlet-elv szerint létezik egy olyan n index, hogy $A_nA_{n+1} + A_{n+1}A_{n+2} \leq 8$. Igazoljuk, hogy az $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ háromszög területe $\leq 0,0008$. A háromszög területe $\leq$ két oldala szorzatának a felénél,

$$\mathrm{Ter}\left(A_nA_{n+1}A_{n+2}\right) \leq \frac{A_nA_{n+1} \cdot A_{n+1}A_{n+2}}{2} \leq \frac{\left(A_nA_{n+1} + A_{n+1}A_{n+2}\right)^2}{4} \leq \frac{(0,08)^2}{8} = 0,0008.$$

---

3. feladat: Az a_n sorozatot a következő módon definiáljuk:

$$a_1 = 1, \quad a_n = \frac{n+1}{n-1}(a_1 + a_2 + \ldots a_{n-1}),\ \text{ha } n > 1.$$

Határozzuk meg a_{2005} értékét!

Péics Hajnalka (Szabadka)

3. feladat I. megoldása: Határozzuk meg a sorozat első néhány elemét.

$$\begin{aligned} a_1 &= \ \ 1 = 2 \cdot \tfrac{1}{2}, \\ a_2 &= \ \ 3 = 3 \cdot 1 \\ a_3 &= \ \ 8 = 4 \cdot 2 \\ a_4 &= 20 = 5 \cdot 4 \\ a_5 &= 48 = 6 \cdot 8 \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a sorozat általános eleme: $a_n = (n+1) \cdot 2^{n-2}$ Igazoljuk észrevételünket matematikai indukcióval! $n = 1$-re $a_1 = (1+1) \cdot 2^{1-2} = 1$. Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden $k = 1, 2, \ldots, n$ esetén. Igazoljuk, hogy az állítás igaz $(n+1)$-re, azaz $a_{n+1} = (n+2) \cdot 2^{n-1}$. Ekkor

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{n+2}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \\ &= \frac{n+2}{n}\left(2 \cdot 2^{-1} + 3 \cdot 2^0 + 4 \cdot 2^1 + 5 \cdot 2^2 + \ldots + (n+1) \cdot 2^{n-2}\right). \end{aligned}$$

Ha $S = 2 \cdot 2^{-1} + 3 \cdot 2^0 + 4 \cdot 2^1 + 5 \cdot 2^2 + \ldots + (n+1) \cdot 2^{n-2}$, akkor $2S = 2 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 4 \cdot 2^2 + \ldots + (n+1) \cdot 2^{n-1}$, majd a következő gondolatmenettel adódik, hogy

$$\begin{aligned} S &= 2S - S = -1 - \left(2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-2}\right) + (n+1) \cdot 2^{n-1} = \\ &= -1 - 1 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2-1} + (n+1) \cdot 2^{n-1} = n \cdot 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Végül, $a_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot S = (n+2) \cdot 2^{n-1}$, amit igazolni is akartunk. Most pedig $a_{2005} = 2006 \cdot 2^{2003}$.

---

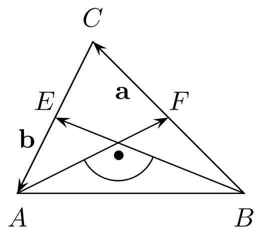
4. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben az a és a b oldalakhoz tartozó súlyvonalak merőlegesek egymásra, akkor

$$5(a^2 + b^2 + c^2) \geq 8ab,$$

ahol c a háromszög harmadik oldala.

Oláh György (Komárom)

4. feladat I. megoldása: Vezessük be a következő jelöléseket: $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$. A további jelöléseket a 2. ábrán találjuk, ahol E és F oldalfelező pontok. $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\overrightarrow{BE} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$.



Tudjuk, hogy ezek a vektorok merőlegesek egymásra, ezért skaláris szorzatuk zérus:

$$\left(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{b}\right)\left(\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}\right) = 0, \text{ azaz } \frac{1}{2}\left(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2\right) + \frac{5}{4}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Kiszámítjuk az $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ skaláris szorzatot, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cdot b \cdot \cos(180^\circ - \gamma) = -a \cdot b \cdot \cos\gamma$, ahol közben bevezettük az $|\mathbf{a}| = a$, $|\mathbf{b}| = b$ jelölést. Ezután előbbi egyenletünk így írható: $\frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right) - \frac{5}{4} a \cdot b \cdot \cos\gamma = 0$, amiből $\cos\gamma = \frac{4}{5} \cdot \frac{a^2+b^2}{2ab}$. Mivel a és b pozitív, és $a^2 + b^2 \geq 2ab$, ezért $\cos\gamma \geq \frac{4}{5}$. A cosinus-tételből: $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, ezt az előző egyenlőtlenségbe helyettesítve kapjuk: $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \geq \frac{4}{5}$, ebből $5\left(a^2 + b^2 - c^2\right) \geq 8ab$, ami nem más, mint a bizonyítandó egyenlőtlenség.

---

5. feladat: Igazoljuk, hogy az

$$x^5 - 10x^4 + 10x^3 - 20x^2 + 5x - 2 = 0$$

egyenlet egyetlen valós gyöke $x = 2 + \sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{9} + \sqrt[5]{27} + \sqrt[5]{81}$.

Kovács Béla (Szatmárnémeti)

5. feladat I. megoldása:

$$x = 2 + \sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{9} + \sqrt[5]{27} + \sqrt[5]{81} = 1 + 1 + \sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{9} + \sqrt[5]{27} + \sqrt[5]{81} = 1 + \frac{2}{\sqrt[5]{3} - 1} = \frac{\sqrt[5]{3} + 1}{\sqrt[5]{3} - 1}$$

Legyen $t = \sqrt[5]{3}$, az $x = \frac{t+1}{t-1}$ helyettesítéssel az adott egyenlet: $t^5 - 3 = 0$, melynek egyetlen valós gyöke az $\sqrt[5]{3}$. Az $f : \mathbb{R} \backslash \{1\} \times \mathbb{R} \backslash \{1\}, f(t) = \frac{t+1}{t-1}$ függvény bijektív, ebből következik hogy az adott egyenlet egyetlen valós gyöke: $\frac{\sqrt[5]{3}+1}{\sqrt[5]{3}-1}$, ami pontosan az adott x valós szám.

Megjegyzés: Az adott egyenlet ekvivalens az $(x+1)^5 = 3(x-1)^5$ egyenlettel.

Általánosítás: Az $(x+1)^5 = a(x-1)^5$ egyenletnek egyetlen valós gyöke van:

$$x = \frac{\sqrt[5]{a} + 1}{\sqrt[5]{a} - 1} = 1 + \frac{2}{a-1}\left(1 + \sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{a^2} + \sqrt[5]{a^3} + \sqrt[5]{a^4}\right)$$

---

6. feladat: Mutassuk meg, hogy minden pozitív egész n esetén fennállnak a

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\binom{n+1}{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\binom{n}{k}} \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\binom{n}{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^{n-k}} \quad (2)$$

azonosságok.

Dályai Pál Péter (Szeged)

6. feladat I. megoldása: Igazoljuk az (1) azonosságot:

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\binom{n+1}{k}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\binom{n}{k}} = \sum_{k=1}^{n} \left(2\frac{(k-1)!}{V_{n+1}^{k}} - \frac{(k-1)!}{V_{n}^{k}}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!\,(n-k+1-k)}{V_{n+1}^{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(k-1)!}{V_{n+1}^{k}} - \frac{k!}{V_{n+1}^{k+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{n!}{(n+1)!} = 0.$$

A második azonosságot teljes indukcióval igazoljuk. $n = 1$ estén a (2) összefüggés az $\frac{1}{1\cdot 1} = \frac{1}{1\cdot 2^0}$ alakot ölti, ami igaz. Most tételezzük fel, hogy a (2) igaz $n = m$ pozitív egészre, azaz fennáll a $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k\binom{m}{k}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k2^{m-k}}$ (3) összefüggés. Igazoljuk, hogy ekkor fennáll a (2) összefüggés $n = m+1$ esetén is. Valóban

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k\binom{m+1}{k}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k\binom{m+1}{k}} + \frac{1}{m+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k\binom{m}{k}} + \frac{1}{m+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k2^{m-k}} + \frac{1}{m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k2^{m-k+1}},$$

ami igazolja állításunkat. Tehát a teljes indukció elve alapján következik, hogy a (2) azonosság fennáll bármely n pozitív egész szám esetén.