# *XIV. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny*

*Miskolc, 2005. márc. 20-23.*

## 11. osztály

**1. feladat:** A valós számok $x_n$ sorozata a következő módon van definiálva:

$$x_1 = a > 0, \quad x_2 = b > 0, \quad x_n = \frac{1 + x_{n-1}}{x_{n-2}}, \text{ ha } n \geq 3.$$

Határozzuk meg az $x_{2005}$ értékét az $a$ és $b$ függvényeként!

*Szabó Magda (Szabadka)*

**2. feladat:**
Egy háromszög oldalaira teljesül az $a^4 + b^4 = c^4$ összefüggés. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a háromszög szögeire $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 2\sin^2\gamma$, ahol $\gamma$ a c oldallal szemközti szög.

*Bogdán Zoltán (Cegléd)*

**3. feladat:** Bizonyítsuk be, hogy ha $a$, $b$ és $c$ pozitív valós számok, akkor

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

*Neubauer Ferenc (Munkács)*

**4. feladat:** Mennyi a tízes számrendszerben felírt $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + 2005 \cdot 2005!$ szám utolsó 500 számjegyének összege?

*Kacsó Ferenc (Marosvásárhely)*

**5. feladat:** Ezer birkát, melyek a 000, 001, 002, ..., 998, 999 számokkal vannak megjelölve, este a juhászkutyák száz olyan akolba terelnek be, melyek ajtajain a 00, 01, 02, ..., 98, 99 kódok olvashatók. Minden birkának olyan akolban kell éjszakáznia, melynek kódját megkapjuk, ha a birka számának valamelyik számjegyét töröljük. (Az 537-es birka tehát csak az 53, 57 vagy a 37 kódszámú akolba mehet.) Sötétedés előtt minden birka bekerült valamelyik akolba. Mennyi az üresen maradó aklok számának lehető legnagyobb értéke?

*Erdős Gábor (Nagykanizsa)*

**6. feladat:** Bizonyítsuk be, hogy minden x, y valós számpár esetén fennáll a

$$\sqrt{9 + x^2 - 3x\sqrt{3}} + \sqrt{x^2 + y^2 - xy\sqrt{3}} + \sqrt{16 + y^2 - 4y\sqrt{3}} \geq 5$$

egyenlőtlenség.

*Dr. Kiss Sándor (Nyíregyháza)*