XIV. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Miskolc, 2005. márc. 20-23.

11. osztály

1. feladat: A valós számok x_n sorozata a következő módon van definiálva:

$$x_1 = a > 0, \quad x_2 = b > 0, \quad x_n = \frac{1 + x_{n-1}}{x_{n-2}}, \text{ ha } n \geq 3.$$

Határozzuk meg az x_{2005} értékét az a és b függvényeként!

Szabó Magda (Szabadka)

1. feladat I. megoldása: $x_3 = \frac{1+b}{a}$, $x_4 = \frac{1+a+b}{ab}$, $x_5 = \frac{1+a}{b}$, $x_6 = a$, $x_7 = b$ tehát a sorozat tagjai ötös periódusban ismétlődnek, ezért az $x_{2005} = x_5 = \frac{1+a}{b}$.

---

2. feladat:

Egy háromszög oldalaira teljesül az $a^4 + b^4 = c^4$ összefüggés. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a háromszög szögeire $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 2\sin^2\gamma$, ahol γ a c oldallal szemközti szög.

Bogdán Zoltán (Cegléd)

2. feladat I. megoldása: A koszinusztétel szerint $a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma = c^2$, ezt négyzetre emelve és $2ab$-val osztva:

$$ab - 2 \cdot \left(a^2 + b^2\right)\cos\gamma + 2ab \cdot \cos^2\gamma = 0,$$

ahol fölhasználtuk az $a^4 + b^4 = c^4$ feltételt is.

Utóbbi alakban a koszinusztétel szerint $a^2 + b^2 = c^2 + 2ab \cdot \cos\gamma$ felhasználásával $ab = 2c^2 \cdot \cos\gamma + 2ab\cos^2\gamma$ adódik.

Írjunk $\cos^2\gamma$ helyett $1 - \sin^2\gamma$-t és osszuk c^2-tel:

$$2\cos\gamma + \frac{ab}{c^2} - 2\frac{ab}{c^2} \cdot \sin^2\gamma = 0.$$

Alkalmazzuk ebben az összefüggésben a szinusztételt:

$$2\cos\gamma + \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin^2\gamma} - 2\sin\alpha \cdot \sin\beta = 0,$$

amiből $2 \cdot (\cos\gamma - \sin\alpha \cdot \sin\beta) + \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin^2\gamma} = 0$, és nyilván $\sin\gamma \neq 0$.

Mivel $\cos\gamma = -\cos(\alpha + \beta)$, az összegzési tétel szerint a zárójelben lévő kifejezés $(-\cos\alpha \cdot \cos\beta)$ lesz. Ezt fölhasználva $2\left(-\cos\alpha \cdot \cos\beta\right) + \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin^2\gamma} = 0$ kapható.

Mivel az oldalak nagyságviszonyából következik, hogy α és β csak hegyesszög lehet, $\cos\alpha \cdot \cos\beta$-val oszthatunk és még $\sin^2\gamma$-val szorozva $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 2 \cdot \sin^2\gamma$ adódik.

Tekintve, hogy átalakításaink megfordíthatók, a feladat állításának megfordítása is igaz.

A létezés kérdésére igennel válaszolhatunk. Tekintsük pl. az $a = 1$, $b = 1$, $c = \sqrt[4]{2}$ esetet. Itt az $a + b > c$ és $a^4 + b^4 = c^4$ is fennáll.

---

3. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha a, b és c pozitív valós számok, akkor

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

Neubauer Ferenc (Munkács)

3. feladat I. megoldása: A kifejezésnek akkor van értelme, ha vagy mindhárom változó egyszerre pozitív, vagy mindhárom egyszerre negatív, vagy az egyikük egyenlő nullával, a másik kettő pedig nem. Ez utóbbi esetben, pl. ha $c = 0$, a $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} > 2$ egyenlőtlenséget kapjuk, ami közismert. Ha mindhárom változó negatív, akkor ugyan azt az esetet kapjuk, mint három pozitív esetében. Ezért elegendő ebben az egy esetben a bizonyítást elvégezni.

Alkalmazzuk a Cauchy-féle egyenlőtlenséget a $\frac{b+c}{a}$ és 1 számokra:

$$\sqrt{\frac{b+c}{a} \cdot 1} \leq \frac{\frac{b+c}{a} + 1}{2} = \frac{a+b+c}{2a}, \text{ ahonnan } \sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{2a}{a+b+c}.$$

Ugyanígy:

$$\sqrt{\frac{b}{a+c}} \geq \frac{2b}{a+b+c} \text{ és } \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c}.$$

Végül:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = 2.$$

---

4. feladat: Mennyi a tízes számrendszerben felírt $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + 2005 \cdot 2005!$ szám utolsó 500 számjegyének összege?

Kacsó Ferenc (Marosvásárhely)

4. feladat I. megoldása: Mivel $k \cdot k! = (k+1)! - k!$, ezért az összeg

$$(2! - 1!) + (3! - 2!) + \ldots + (2006! - 2005!) = 2006! - 1.$$

Megállapíthatjuk, hogy 2006! hány nullában végződik. Mivel 2006! prímtényezős felbontásában 2 hatványkitevője nagyobb, mint 5 hatványkitevője, a nullák száma 5 hatványkitevőjével egyenlő:

1, 2, 3, …, 2006 közül 5-tel oszthatók:
$\underline{1} \cdot 5$, $\underline{2} \cdot 5$, $\underline{3} \cdot 5$, …, $\underline{401} \cdot 5$; összesen 401 szám.

Az 5-öt szorzó (aláhúzott) számok közül 5-tel osztható számok:
$\underline{1} \cdot 5$, $\underline{2} \cdot 5$, …, $\underline{80} \cdot 5$; összesen 80 szám.

Az aláhúzott számok közül 5-tel osztható számok:
$\underline{1} \cdot 5$, $\underline{2} \cdot 5$, $\underline{3} \cdot 5$, …, $\underline{16} \cdot 5$; összesen 16 szám.

Az itt aláhúzott számok közül 5-tel osztható számok: $\underline{1} \cdot 5$, $\underline{2} \cdot 5$, $\underline{3} \cdot 5$; összesen 3 szám, az aláhúzott számok nem oszthatók 5-tel.

Ennek alapján 2006! prímtényezős felbontásában az 5 hatványkitevője

$$401 + 80 + 16 + 3 = 500,$$

ami azt jelenti, hogy 2006! utolsó 500 számjegye nulla, s így $2006! - 1$ utolsó 500 számjegye 9-cel egyenlő. Tehát a szám utolsó 500 számjegyének összege:

$$500 \cdot 9 = 4500.$$

---

5. feladat: Ezer birkát, melyek a 000, 001, 002, …, 998, 999 számokkal vannak megjelölve, este a juhászkutyák száz olyan akolba terelnek be, melyek ajtajain a 00, 01, 02, …, 98, 99 kódok olvashatók. Minden birkának olyan akolban kell éjszakáznia, melynek kódját megkapjuk, ha a birka számának valamelyik számjegyét töröljük. (Az 537-es birka tehát csak az 53, 57 vagy a 37 kódszámú akolba mehet.) Sötétedés előtt minden birka bekerült valamelyik akolba. Mennyi az üresen maradó aklok számának lehető legnagyobb értéke?

Erdős Gábor (Nagykanizsa)

5. feladat I. megoldása: A keresett maximum értéke 50.

Mivel minden háromjegyű számban van két azonos paritású számjegy, ezért ha azokat hagyjuk meg, akkor minden birka beterelhető egy olyan akolba, amelynek két számjegye azonos paritású, az ilyen akolok száma 50. Ekkor 50 akol üresen marad.

A bizonyítás nehezebb része annak belátása, hogy több üres akol nem lehet, mivel legalább 50 akolra szükség van.

Válasszuk ki a birkák 3 csoportját. Hívjuk konstans birkának azokat, akiknek mindhárom számjegye azonos, optimista birkának, akiknek számjegyei növekvő sorrendben követik egymást, és pesszimistának, akiknek számjegyei csökkenő sorrendben követik egymást.

A konstans birkáknak 10 karámra van szükségük: 00, 11, 22, ..., 99. Ide a másik két csoport egyik birkája sem mehet be. (De a csoportok egyikébe sem tartozó igen, pl. 199 számú.) Hasonlóan nyilvánvaló, hogy optimista birka nem keveredhet a pesszimisták akoljába és fordítva. Elég tehát belátni, hogy az optimistáknak legalább 20 akol kell, mert akkor szimmetria okokból ugyanez elmondható a pesszimistákra is, így összesen $10 + 20 + 20 = 50$ tele akolnak legalább kell lennie.

Legyen S_n $2n$ darab nem negatív egész szám halmaza. Nevezzük S_n-birkának azokat a birkákat, akiknek a kódjának mindhárom számjegye ebből a halmazból való. Lássuk be, hogy az optimista S_n-birkák számára legalább $n \cdot (n-1)$, vagyis az eredeti feladatban $5 \cdot 4 = 20$ akolra van szükség.

A bizonyításhoz alkalmazzunk teljes indukciót. $n = 1$-re az állítás triviálisan igaz, és $n = 2$-re is könnyen átgondolható. Tegyük fel, hogy $n-1$-re igaz, és lássuk be, hogy n-re is az.

Legyen S_n legkisebb eleme a. Ha feltesszük, hogy mindegyik ac jelű akol foglalt, ahol c az S_n valamelyik eleme, akkor ez $2n-1$ tele akolt jelent, így mivel S_n-ből a-t és bármely másik elemet elhagyva egy $2n-2$ elemű S_n halmazt kapunk, az indukciós feltétel szerint ebben a halmazban már biztosan van legalább $(n-1) \cdot (n-2)$ darab foglalt akol, így a foglalt akolok száma legalább $(n-1) \cdot (n-2) + 2n - 1 > n \cdot (n-1)$. Tegyük fel most, hogy lesz olyan üres akol, amelynek a kódja a-val kezdődik. Ha több van, a legnagyobb kódút hívjuk ac-nek. Hagyjuk most el az S_n-ből a-t és c-t. Az így kapott S_{n-1}-hez tartozó optimista birkák számára az indukciós feltétel szerint legalább $(n-1) \cdot (n-2)$ akol szükséges, míg az ide nem tartozó S_n-birkák, akiknek a kódja abc, csak az ab vagy bc akolba mehetnek (ac üres), ezért ezen két akol egyikében lesz birka, így mivel b helyére S_{n-1} mind a $2n-2$ eleme beírható, az optimista S_n-birkák számára legalább $(n-1) \cdot (n-2) + 2n - 2 = n \cdot (n-1)$ akol szükséges.

---

6. feladat: Bizonyítsuk be, hogy minden x, y valós számpár esetén fennáll a

$$\sqrt{9 + x^2 - 3x\sqrt{3}} + \sqrt{x^2 + y^2 - xy\sqrt{3}} + \sqrt{16 + y^2 - 4y\sqrt{3}} \geq 5$$

egyenlőtlenség.

Dr. Kiss Sándor (Nyíregyháza)

6. feladat I. megoldása: Adjunk geometriai tartalmat a problémának!

Vegyünk fel egy ABC derékszögű háromszöget, amelyben $AC = 3$, $BC = 4$, $AC = 5$ egység. Az ACB derékszöget osszuk 3 egyenlő részre. A most kapott szögharmadoló félegyeneseken vegyük fel a D és az E pontokat tetszőlegesen. Legyen $CD = x$ és $CE = y$. Írjunk fel egy-egy cosinus tételt az ACD háromszögben az AD oldalra, a DCE háromszögben a DE oldalra és az ECB háromszögben az EB oldalra.

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{9 + x^2 - 3x\sqrt{3}} \\ DE &= \sqrt{x^2 + y^2 - xy\sqrt{3}} \\ EB &= \sqrt{16 + y^2 - 4y\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Használjuk fel, hogy a törött vonal hossza legalább annyi, mint a végpontjait összekötő egyenes szakasz. Ezeket összeadva kapjuk a bizonyítandó összefüggést.

Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a D és E pontot az átfogón vesszük fel.