XIV. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Miskolc, 2005. márc. 20-23.

10. osztály

1. feladat: Adott öt szakasz, melyek közül bármely háromból háromszög szerkeszthető. Mutassuk meg, hogy a szakaszok közül kiválasztható három, melyekből hegyesszögű háromszöget lehet szerkeszteni.

Bencze Mihály (Brassó)

2. feladat: A sík két szabályos háromszög ABC és PRQ olyan helyzetben vannak, hogy az R pont az AB szakasz belső pontja, a C pedig a PQ belső pontja, miközben A és P a CR egyenes azonos oldalán helyezkednek el. Bizonyítsuk, hogy az AP és BQ egyenesek párhuzamosak!

Szabó Magda (Szabadka)

3. feladat: Bizonyítsuk be, hogy az $x^3 - 2004x^2 + rx + 2005 = 0$ egyenletnek minden r valós együttható esetén legfeljebb egy egész megoldása van.

Oláh György (Komárom)

4. feladat: Határozzuk meg azokat az m és n pozitív egész számokat, melyekre teljesül az

$$(m^3 + n) \cdot (m + n^3) = (m + n)^4$$

egyenlőség.

Erdős Gábor (Nagykanizsa)

5. feladat: Az ABC derékszögű háromszög AC és BC befogóira kifelé szerkesztett négyzetek $ACDE$ és a $CBGF$. Az AGF és BDE derékszögű háromszögek AG és BE átfogóinak metszéspontja legyen P, a P-n átmenő AC-vel, illetve BC-vel párhuzamos egyenesek pedig messék az ABC háromszög oldalait a K és M, illetve az L és N pontokban. Mutassuk meg, hogy a $KLMN$ négyszög szimmetrikus trapéz!

Bíró Bálint (Eger)

6. feladat: Ezer birkát, melyek a 000, 001, 002, ..., 998, 999 számokkal vannak megjelölve, este a juhászkutyák száz olyan akolba terelnek be, melyek ajtajain a 00, 01, 02, ..., 98, 99 kódok olvashatók. Minden birkának olyan akolban kell éjszakáznia, melynek kódját megkapjuk, ha a birka számának valamelyik számjegyét töröljük. (Az 537-es birka tehát csak az 53, 57 vagy a 37 kódszámú akolba mehet.) Sötétedés előtt minden birka bekerült valamelyik akolba. Mutassuk meg, hogy legfeljebb 50 akol maradhatott üresen!

Erdős Gábor (Nagykanizsa)