XIV. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Miskolc, 2005. márc. 20-23.

10. osztály

1. feladat: Adott öt szakasz, melyek közül bármely háromból háromszög szerkeszthető. Mutassuk meg, hogy a szakaszok közül kiválasztható három, melyekből hegyesszögű háromszöget lehet szerkeszteni.

Bencze Mihály (Brassó)

1. feladat I. megoldása: Legyenek $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$ az öt szakasz.
Ha feltételezzük, hogy az összes alkotható háromszögek tompák vagy derékszögűek, akkor

$$x_3^2 \geq x_1^2 + x_2^2,\ x_4^2 \geq x_2^2 + x_3^2,\ x_5^2 \geq x_3^2 + x_4^2,$$

innen $x_3^2 + x_4^2 \geq x_1^2 + x_2^2 + x_2^2 + x_3^2$ vagy

$$x_5^2 \geq x_3^2 + x_4^2 \geq x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \geq x_1^2 + 2x_2^2 + x_2^2 \geq (x_1 + x_2)^2$$

azaz $x_5 \geq x_1 + x_2$, ami ellentmondás, mert x_1, x_2, x_3 szakaszokkal szerkeszthető háromszög.

---

2. feladat: A sík két szabályos háromszög ABC és PRQ olyan helyzetben vannak, hogy az R pont az AB szakasz belső pontja, a C pedig a PQ belső pontja, miközben A és P a CR egyenes azonos oldalán helyezkednek el. Bizonyítsuk, hogy az AP és BQ egyenesek párhuzamosak!

Szabó Magda (Szabadka)

2. feladat I. megoldása: Mivel a $CAR\angle = RPC\angle = 60°$ és az $ARCP$ húrnégyszög, így az $APR\angle = ACR\angle$, analóg módon $BQR\angle = BCR\angle$, amelyből következik, hogy

$$\begin{aligned} APC\angle + BQC\angle &= APR\angle + RPC\angle + BQR\angle + RQC\angle = \\ &= ACR\angle + 60° + BCR\angle + 60° = ACB\angle + 120° = 180°, \end{aligned}$$

ezért AP párhuzamos BQ-val.

---

3. feladat: Bizonyítsuk be, hogy az $x^3 - 2004x^2 + rx + 2005 = 0$ egyenletnek minden r valós együttható esetén legfeljebb egy egész megoldása van.

Oláh György (Komárom)

3. feladat I. megoldása: Tételezzük fel, hogy az adott egyenletnek valamely r szám esetén a, b két egész gyöke van. Ennélfogva a harmadik c gyöknek szintén egész kell, hogy legyen, mivelhogy $a + b + c = 2004$.

Az a, b, c számok mindegyike nem lehet páratlan, mivel az összegük páros. A szorzatuk, 2005 páratlan, ami lehetetlen. Tehát az egyenletnek legfeljebb egy egész gyöke lehet.

---

4. feladat: Határozzuk meg azokat az m és n pozitív egész számokat, melyekre teljesül az

$$(m^3 + n) \cdot (m + n^3) = (m + n)^4$$

egyenlőség.

Erdős Gábor (Nagykanizsa)

4. feladat I. megoldása: A műveleteket elvégezve, a pozitív a és b számokkal osztva kapjuk, hogy $(m \cdot n + 1)^2 = 4\,(m + n)^2$, azaz $m \cdot n + 1 = \pm 2 \cdot (m + n)$.

A két diofantoszi egyenletet külön megoldva az $(5, 3)$ és $(3, 5)$ megoldások adódnak.

---

5. feladat: Az ABC derékszögű háromszög AC és BC befogóira kifelé szerkesztett négyzetek $ACDE$ és a $CBGF$. Az AGF és BDE derékszögű háromszögek AG és BE átfogóinak metszéspontja legyen P, a P-n átmenő AC-vel, illetve BC-vel párhuzamos egyenesek pedig messék az ABC háromszög oldalait a K és M, illetve az L és N pontokban. Mutassuk meg, hogy a $KLMN$ négyszög szimmetrikus trapéz!

Bíró Bálint (Eger)

5. feladat I. megoldása: A GAB háromszögben a $PK = x$ szakasz párhuzamos a $BG = a$ szakasszal, ezért felírhatjuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét a következőképpen: (1) $\frac{x}{a} = \frac{AP}{AG}$. Ugyancsak a párhuzamos szelőszakaszok tétele miatt (vagy az FAG és az NAP háromszögek hasonlósága következtében): (2) $\frac{v}{a} = \frac{AP}{AG}$. (1) és (2) összevetéséből $x = v$ következik. Mivel a PK és a PN szakaszok párhuzamosak az ABC háromszög befogóival, ezért a fentiekre is tekintettel kijelenthetjük, hogy a KNP háromszög egyenlőszárú derékszögű háromszög.

Hasonlóképpen láthatjuk be a párhuzamos szelőszakaszok tétele segítségével (vagy a BMP és a BDE illetve a BPL és a BEA háromszögek hasonlósága alapján), hogy: (3) $\frac{z}{b} = \frac{BP}{BE}$ és $\frac{y}{b} = \frac{BP}{BE}$, ahonnan $\frac{z}{b} = \frac{y}{b}$, illetve $z = y$ adódik.

Ebből pedig az következik, hogy az LMP derékszögű háromszög is egyenlő szárú.

Ezért pl. az MN szakasz a K és az L pontból is $45°$-os szögben látszik, tehát a K és az L pontok rajta vannak az MN szakasz fölé rajzolt $45°$-os látószögköríven, így a K, L, M, N pontok egy körön vannak, vagyis valóban egy húrnégyszög csúcsai.

Megjegyzés: a bizonyítás menete alapján könnyen belátható, hogy $KLMN$ szimmetrikus trapéz is.

---

6. feladat: Ezer birkát, melyek a 000, 001, 002, …, 998, 999 számokkal vannak megjelölve, este a juhászkutyák száz olyan akolba terelnek be, melyek ajtajain a 00, 01, 02, …, 98, 99 kódok olvashatók. Minden birkának olyan akolban kell éjszakáznia, melynek kódját megkapjuk, ha a birka számának valamelyik számjegyét töröljük. (Az 537-es birka tehát csak az 53, 57 vagy a 37 kódszámú akolba mehet.) Sötétedés előtt minden birka bekerült valamelyik akolba. Mutassuk meg, hogy legfeljebb 50 akol maradhatott üresen!

Erdős Gábor (Nagykanizsa)

6. feladat I. megoldása: A keresett maximum értéke 50.

Mivel minden háromjegyű számban van két azonos paritású számjegy, ezért ha azokat hagyjuk meg, akkor minden birka beterelhető egy olyan akolba, amelynek két számjegye azonos paritású, az ilyen akolok száma 50. Ekkor 50 akol üresen marad.

A bizonyítás nehezebb része annak belátása, hogy több üres akol nem lehet, mivel legalább 50 akolra szükség van.

Válasszuk ki a birkák 3 csoportját. Hívjuk konstans birkának azokat, akiknek mindhárom számjegye azonos, optimista birkának, akiknek számjegyei növekvő sorrendben követik egymást, és pesszimistának, akiknek számjegyei csökkenő sorrendben követik egymást.

A konstans birkáknak 10 karámra van szükségük: 00, 11, 22, …, 99. Ide a másik két csoport egyik birkája sem mehet be. (De a csoportok egyikébe sem tartozó igen, pl. 199 számú.) Hasonlóan nyilvánvaló, hogy optimista birka nem keveredhet a pesszimisták akoljába és fordítva. Elég tehát belátni, hogy az optimistáknak legalább 20 akol kell, mert akkor szimmetria okokból ugyanez elmondható a pesszimistákra is, így összesen $10 + 20 + 20 = 50$ tele akolnak legalább kell lennie.

Legyen S_n $2n$ darab nem negatív egész szám halmaza. Nevezzük S_n-birkának azokat a birkákat, akiknek a kódjának mindhárom számjegye ebből a halmazból való. Lássuk be, hogy az optimista S_n-birkák számára legalább $n \cdot (n-1)$, vagyis az eredeti feladatban $5 \cdot 4 = 20$ akolra van szükség.

A bizonyításhoz alkalmazzunk teljes indukciót. $n = 1$-re az állítás triviálisan igaz, és $n = 2$-re is könnyen átgondolható. Tegyük fel, hogy $n - 1$-re igaz, és lássuk be, hogy n-re is az.

Legyen S_n legkisebb eleme a. Ha feltesszük, hogy mindegyik ac jelű akol foglalt, ahol c az S_n valamelyik eleme, akkor ez $2n - 1$ tele akolt jelent, így mivel S_n-ből a-t és bármely másik elemet elhagyva egy

$2n-2$ elemű S_n halmazt kapunk, az indukciós feltétel szerint ebben a halmazban már biztosan van legalább $(n-1)\cdot(n-2)$ darab foglalt akol, így a foglalt akolok száma legalább $(n-1)\cdot(n-2)+2n-1 > n\cdot(n-1)$. Tegyük fel most, hogy lesz olyan üres akol, amelynek a kódja a-val kezdődik. Ha több van, a legnagyobb kódút hívjuk ac-nek. Hagyjuk most el az S_n-ből a-t és c-t. Az így kapott S_{n-1}-hez tartozó optimista birkák számára az indukciós feltétel szerint legalább $(n-1)\cdot(n-2)$ akol szükséges, míg az ide nem tartozó S_n-birkák, akiknek a kódja abc, csak az ab vagy bc akolba mehetnek (ac üres), ezért ezen két akol egyikében lesz birka, így mivel b helyére S_{n-1} mind a $2n-2$ eleme beírható, az optimista S_n-birkák számára legalább $(n-1)\cdot(n-2)+2n-2 = n\cdot(n-1)$ akol szükséges.