XIV. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Miskolc, 2005. márc. 20-23.

9. osztály

1. feladat: Egy egyetemista ötéves tanulmányai alatt összesen 31 vizsgát tett le. Minden évben több vizsgát tett le, mint az azt megelőző évben, ötödéves korában pedig éppen háromszor annyit, mint az első éven. Hány tárgyból vizsgázott a negyedik évben?

Szabó Magda (Szabadka)

1. feladat I. megoldása: Legyenek az évenkénti vizsgák számát $a < b < c < d < e$ és $a + b + c + d + e = 31$,

- ha az $a \geq 4$, akkor $b \geq 5$; $c \geq 6$; $d \geq 7$; $e \geq 12$, de az $a + b + c + d + e \geq 34 > 31$ és ez lehetetlen.
- Ha az $a = 1$ akkor az $e = 3$ és $1 < b < c < d < 3$, ez is lehetetlen.
- Ha az $a = 2$, akkor $e = 6$ és $2 < b < c < d < 6$, így a $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$, de akkor $a + b + c + d + e = 20 \neq 31$;
- tehát az $a = 3$, $e = 9$ esetén $d \leq 7$, $c \leq 6$, $b \leq 5$, amelyből az következik, hogy $a + b + c + d + e \leq 3 + 5 + 6 + 7 + 9 = 30 < 31$ tehát $d = 8$.

A lehetséges vizsgaeloszlás:
$a = 3$, $b = 4$; $c = 7$, $d = 8$, $e = 9$ vagy $a = 3$, $b = 5$; $c = 6$, $d = 8$, $e = 9$.

---

2. feladat: Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög A csúcsából induló magasságvonalának hossza legfeljebb akkora, mint a háromszög AB és AC oldalaihoz hozzáírt körök sugarainak számtani közepe!

Vass Iván (Miskolc)

2. feladat I. megoldása: A szokásos jelölésekkel a bizonyítandó állítás

$$m_a \leq \frac{\rho_b + \rho_c}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{2T}{a} \leq \frac{\frac{T}{s-b} + \frac{T}{s-c}}{2},$$

ami egyszerűsítés és átalakítások után

$$(s-b) \cdot (s-c) \leq \frac{a^2}{4}.$$

De ez igaz a

$$\sqrt{(s-b) \cdot (s-c)} \leq \frac{(s-b) + (s-c)}{2} = \frac{a}{2}$$

mértani és számtani közepek közti egyenlőtlenség alapján.

---

3. feladat: Az $ABCD$ téglalap köré írt kör kisebbik AB ívén lévő P pontból a téglalap AC és BD átlóira bocsátott merőlegesek talppontjai legyenek M és N. Mutassuk meg, hogy az MN szakasz hossza független a P pont választásától.

Sipos Elvira (Zenta)

3. feladat I. megoldása: Legyen O pont k kör középpontja. Ekkor a $PMON$ négyszög húrnégyszög, mert $ONP\angle + OMP\angle = 180°$. Mivel az $ONP\angle$ és $OMP\angle$ derékszögek, az OP átmérő fölé l kört szerkesztünk, amely a $PMON$ négyszög körülírt köre, de az OP szakasz k körnek is sugara. Ekkor az NM szakasz az l körben az $AOB\angle$ kerületi szögnek megfelelő húr. Tehát függetlenül a P pont választásától, NM húr az OA átmérőjű kör $AOB\angle$ szögének felel meg (illetve a megfelelő állandó középponti szögnek). Az egybevágó körök egybevágó középponti szögeihez egybevágó húrok tartoznak, ezért az NM szakasz hossza nem függ a P pont választásától.

---

4. feladat: Vannak-e olyan m és n pozitív egész számok, melyekre teljesül az

$$m(m+1)(m+2)(m+3) = n(n+1)$$

egyenlőség?

Oláh György (Komárom)

4. feladat I. megoldása: Végezzük el a két oldalon a beszorzásokat és adjunk hozzá mindkét oldalhoz 1-et! Ekkor az egyenlet a következő alakban írható:

$$(m^2 + 3m + 1)^2 = n^2 + n + 1.$$

Itt a bal oldal teljes négyzet, tehát a jobb oldalnak is annak kellene lennie. De ha $n > 0$, akkor

$$n^2 < n^2 + n + 1 < (n + 1)^2.$$

Mivel pedig n^2 és $(n+1)^2$ között nem lehet négyzetszám, ezért az egyenlet a természetes számok körében nem oldható meg.

---

5. feladat: Az $ABCD$ trapéz AC átlója 12, a BD pedig 9 egység hosszú, s ez a két átló merőleges egymásra. Tudjuk még, hogy $AB \cdot CD = 50$. Határozzuk meg az $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$ összeg értékét!

Dr. Kiss Sándor (Nyíregyháza)

5. feladat I. megoldása: Készítsünk ábrát, s rajzoljuk be az ACD és BCD háromszögek MP és NP középvonalait. Az átlók metszéspontja legyen O. Az átlók merőlegessége miatt $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$, hiszen $AD^2 = AO^2 + DO^2$ és $BC^2 = BO^2 + CO^2$. Hasonlóan írjuk fel a Pythagorasz tételt a másik két oldalra is. Ezzel beláthatjuk, hogy elegendő az $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$ helyett a $2(AB^2 + CD^2)$ értékét meghatározni.

Az MN hossza a középvonal tulajdonság miatt $MN = \frac{AB+CD}{2}$, továbbá $MP = \frac{AC}{2} = 6$ és $NP = \frac{BD}{2} = 4{,}5$. Az MNP háromszög a feladat feltételei alapján derékszögű lesz, ezért

$$MN^2 = MP^2 + NP^2 = 6^2 + 4{,}5^2 = 56{,}25,$$

amiből $MN = 7{,}5$. Tehát $MN = \frac{AB+CD}{2} = 7{,}5$, amiből $AB + CD = 15$.

Ezt négyzetre emelve:

$$AB^2 + CD^2 + 2 \cdot AB \cdot CD = 225.$$

A feltételek alapján

$$AB^2 + CD^2 + 2 \cdot 50 = 225,$$

tehát

$$AB^2 + CD^2 = 125.$$

Tehát a keresett $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$ érték 250.

---

6. feladat: Egységnyi élű fakockákból álló téglatestet építettünk, melynek méretei $10 \times 802 \times 2005$. Hány kis kockát lyukaszt ki az a pontszerű szú, amelyik a téglatest egyik testátlója mentén végigrágja magát?

Fejér Szabolcs (Miskolc)

6. feladat I. megoldása: $20 = 5 \cdot 5$, $802 = 2 \cdot 401$, $2005 = 5 \cdot 401$

Legyen a ,,start" csúcsból kiinduló 3 él a 3 koordinátatengely pozitív fele. Jellemezzük az egységkockákat az origótól legtávolabbi csúcsuk koordinátáival! A ,,start" kocka az $(1; 1; 1)$, ,,cél" a $(2005; 802; 10)$. Minden ,,határátlépés" során új kockába jut a szú. Ez történhet

a) csúcson (3 koordináta nő)
b) élen, de nem csúcson (2 koordináta nő)
c) lapon, de nem élen (1 koordináta nő).

Csúcson akkor lépünk át, ha van hasonló rész-téglatest az eredetihez. Mivel (10;802;2005)=1, így ilyen nincs.

Ha vizsgáljuk a különböző koordinátasíkokkal párhuzamos síkmetszeteket, akkor a síkra merőleges élek a téglalapban rácspontokat alkotnak. Például a 802×2005-ös téglalaphoz hasonló a 2×5-ös. A szú mozgása során 401 ilyen téglalapot érint (400 lépés). A 10×802-esben (hozzá hasonló 5×401) kettőt (1 lépés). A 10×2005-ösben (hozzá hasonló 2×401) ötöt (4 lépés). Mivel a koordináták összváltozása $2004 + 801 + 9 = 2814$, amiből éleken át történik $400 + 4 + 1 = 405$, ami 810 koordinátaváltozás, így $2814 - 810 = 2004$ lépés történik csak lapon.

Az összes lépések száma $2004 + 405 = 2409$.

Így a bejárt egységkockák száma a kiindulásival együtt 2410.