XIII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Nagydobrony, 2004. márc. 15-20.

12. osztály

1. feladat: Mennyi a legkisebb értéke az $f(x) = \log_{x^2-2x+2005} \frac{\sqrt{2004}}{2004}$ függvénynek?

Szabó Magda (Szabadka)

1. feladat I. megoldása: A logaritmus alapja $x^2 - 2x + 2005 = (x-1)^2 + 2004$, ami x bármely értékével 1-nél nagyobb. Továbbá $\frac{\sqrt{2004}}{2004} < 1$. A $(0;1)$ intervallumban az 1-nél nagyobb alap mellett a kisebb alapú logaritmusfüggvény grafikonja van alacsonyabban. Ezért az adott függvény értéke akkor a legkisebb, ha $(x-1)^2 + 2004$ a legkisebb, vagyis $x = 1$-re. Tehát, $\min f(x) = \log_{2004} \frac{\sqrt{2004}}{2004} = \log_{2004} 2004^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$. Általánosítva, minden valós x értékre $f(x) = \log_{x^2-2x+1+K} \frac{\sqrt{K}}{K} \geq -\frac{1}{2}$.

---

2. feladat: Oldja meg a következő egyenletet:

$$4^{\sin x} \cdot 5^{-\sin^{-1} x} + 4^{-\sin x} \cdot 5^{\sin^{-1} x} = \frac{629}{50}$$

Bencze Mihály (Brassó)

2. feladat I. megoldása: A $4^{\sin x} \cdot 5^{-\sin^{-1} x}$ kifejezés inverze a $4^{-\sin x} \cdot 5^{\sin^{-1} x}$ kifejezésnek. Ezért $4^{\sin x} \cdot 5^{-\sin^{-1} x} = y$ helyettesítéssel az $y + \frac{1}{y} = \frac{629}{50}$ egyenlethez jutunk, melynek gyökei $\frac{2}{50}$ és $\frac{25}{2}$. Akkor először: $4^{\sin x} \cdot 5^{-\sin^{-1} x} = \frac{2}{25}$. Vesszük mindkét oldal 2-es alapú logaritmusát:

$$\begin{aligned}
\sin x \cdot \log_2 4 - \frac{1}{\sin x} \cdot \log_2 5 &= \log_2 2 - \log_2 25 \\
2\sin^2 x + (2\log_2 5 - 1)\sin x - \log_2 5 &= 0 \\
\sin x_{1,2} &= \frac{1 - 2\log_2 5 \pm (2\log_2 5 + 1)}{4}.
\end{aligned}$$

$\sin x_1 = \frac{1}{2} \iff x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; $\sin x_2 = -\log_2 5 < -1$, ezért innen nincs gyök. Másodszor:

$$\begin{aligned}
4^{\sin x} \cdot 5^{-\sin^{-1} x} &= \frac{25}{2} \\
\sin x \cdot \log_2 4 - \frac{1}{\sin x} \cdot \log_2 5 &= \log_2 25 - \log_2 2 \\
2\sin^2 x - (2\log_2 5 - 1)\sin x - \log_2 5 &= 0 \\
\sin x_{1,2} &= \frac{2\log_2 5 - 1 \pm (2\log_2 5 + 1)}{4}.
\end{aligned}$$

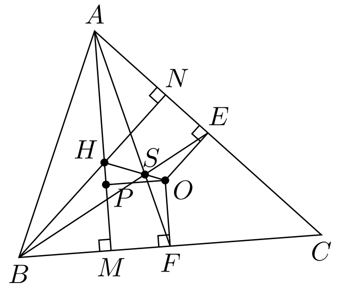
$x_1 = \log_2 5 > 1$, ezért ebből nincs gyök, $\sin x_2 = -\frac{1}{2} \iff x_2 = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Az $x_1 = x_2$ sorok összevonhatók egy képletbe: $\pm\frac{\pi}{\mathbf{6}} + \mathbf{n}\pi,\ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}$.

---

3. feladat: Egy háromszög oldalai 13 cm, 14 cm és 15 cm. Mekkora a távolság a háromszög súlypontja és a köré írt kör középpontja között?

Kicska György (Munkács)

3. feladat I. megoldása: Legyen az adott ABC háromszögben $AB = 13$ cm, $AC = 14$ cm, $BC = 15$ cm. O – a köré írt kör középpontja, S – a háromszög súlypontja, H – a magasságpontja. Ha a háromszöget egy S középpontú és $k = 2$ arányú homotéciával leképezzük, akkor minden oldal a vele párhuzamos és a szemben fekvő csúcson áthaladó oldalba képeződik le, melynek felezőpontja az adott háromszög csúcsa lesz. De ekkor az oldalfelező merőlegesek O metszéspontja a H magasságpontba képeződik le, miközben $SH = 2SO$. Kiszámítjuk a HO távolságot, annak harmada lesz a keresett távolság.



A háromszög területe Heron képletéből: $\sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 4 \cdot 3 \cdot 7 = 84$. A köré írt kör sugara $R = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \frac{65}{8}$. Az AM magasság $\frac{2 \cdot 84}{15} = \frac{56}{5}$. AMB háromszögben: $BM = \sqrt{13^2 - \left(\frac{56}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1089}{25}} = \frac{33}{5}$. $OP = FM = \frac{15}{2} - \frac{33}{5} = \frac{9}{10}$.

OFB derékszögű háromszögben

$$OF = \sqrt{\left(\frac{65}{8}\right)^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{625}{64}} = \frac{25}{8} = PM.$$

A homotéciából: $AH = 2OF$, ezért

$$HP = AM - AH - PM = \frac{56}{5} - \frac{25}{4} - \frac{25}{8} = \frac{73}{40}.$$

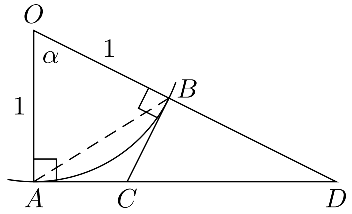
Most HPO derékszögű háromszögből $HO = \sqrt{\left(\frac{73}{40}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{6625}{1600}} = \frac{5\sqrt{265}}{40} = \frac{\sqrt{265}}{8}$. Végül $\mathbf{SO} = \frac{\sqrt{265}}{24} \approx \mathbf{0{,}6783}$.

---

4. feladat: Bizonyítsa be, hogy egy hegyesszög radiánmértéke kisebb, mint szinuszának és tangensének számtani közepe.

Bogdán Zoltán (Cegléd)

4. feladat I. megoldása: Az $O\angle = \alpha$ szögben O középponttal egységnyi sugarú körívet rajzolunk, és a szög száraival keletkezett A és B metszéspontokba meghúzzuk az érintőket. Azok metszéspontja legyen C, az A ponton áthaladó érintő és a szög OB szárának metszéspontja D.



A BCD derékszögű háromszögből $CD > BC = AC$, tehát a BCD háromszög területe nagyobb, mint az ABC háromszögé. De $T_{BCD} = T_{OAD} + T_{OACB}$; ugyanakkor $T_{ABC} = T_{OACB} + T_{OAB}$, ezért igaz a következő egyenlőtlenség: $T_{OAD} - T_{OACB} > T_{OACB} - T_{OAB}$. Ebből $T_{OAD} - T_{OACB} > 2 \cdot T_{OACB}$, ami pedig nagyobb az OAB körcikk területének kétszeresénél. Az OAD háromszög területe $\frac{1}{2} \cdot OA \cdot AD = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{2}$, az OAB háromszögé $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{2}$, az OAB körcikké pedig az $\frac{R^2}{2} \cdot \alpha$ radiános területképlet alapján $\frac{1^2}{2} \cdot \alpha = \frac{\alpha}{2}$. Végül, $\frac{\mathrm{tg}\alpha}{2} + \frac{\sin\alpha}{2} > 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \alpha$ **Az állítás bizonyított**.

---

5. feladat: Igazolja, hogy $\sin 1°$, $\cos 1°$ és $\mathrm{tg}\, 1°$ számok irracionálisak!

Gecse Frigyes (Cegléd)

5. feladat I. megoldása: A bizonyítás során többször felhasználjuk majd a következő állítást: A racionális számok halmaza zárt a számtani műveletekre nézve. Tegyük fel, hogy a $\sin 1°$, $\cos 1°$ és $\mathrm{tg}\, 1°$ számok közül legalább az egyik racionális szám. Akkor a $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$; $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, $\cos 2\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$ képletekből következik, hogy $\cos 2°$ szintén racionális szám. Előbbi képletek egymás utáni további 11-szeri alkalmazásával kapjuk, hogy $\cos 4°$, $\cos 8°$, $\cos 16°$, $\ldots \cos 4096°$ számok is racionálisak, ahol $4096 = 2^{12}$.

De

$$\cos 4096° = \cos(4096° - 360° \cdot 11) = \cos 136° = -\cos 44°,$$

ami azt jelenti, hogy $\cos 44°$ szintén racionális. Akkor viszont $\cos 88° = \sin 2°$ is racionális. Most a $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ képletet egymás után 4-szer alkalmazva azt találjuk, hogy $\sin 4°$, $\sin 8°$, $\sin 16°$ és $\sin 32°$ is racionális. Végül, egyrészt $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ami nyilván irracionális, másrészt

$$\cos 30° = \cos(32° - 2°) = \cos 32° \cos 2° + \sin 32° \sin 2°,$$

ami a fentebb bizonyítottak alapján racionális szám. A kapott ellentmondás azt mutatja, hogy feltevésünk helytelen volt, azaz **igaz a feladat állítása**.

---

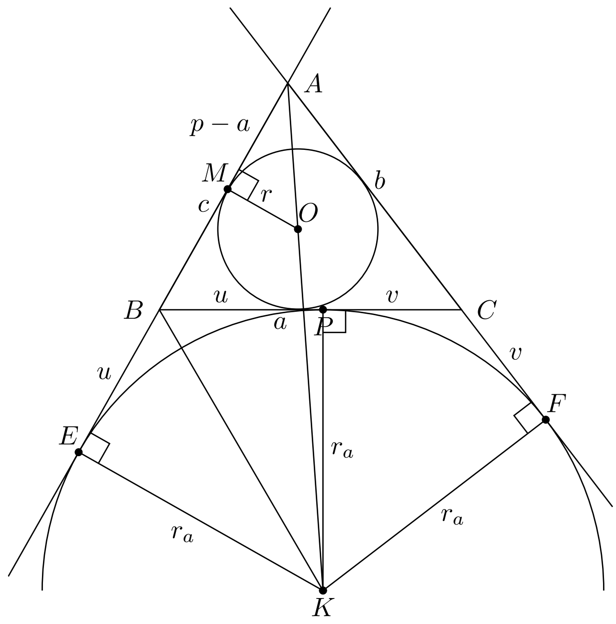
6. feladat: Bizonyítsa be, hogy a háromszögbe írt kör r sugarára, a hozzáírt körök r_a, r_b, r_c sugaraira és a háromszög p félkerületére érvényes a $\sqrt{r \cdot r_a} + \sqrt{r \cdot r_b} + \sqrt{r \cdot r_c} \leq p$ egyenlőtlenség. (A háromszög hozzáírt körének nevezzük a háromszög egyik oldalát kívülről érintő, és a másik két oldal meghosszabbítását érintő kört.)

Oláh György (Komárom)

6. feladat I. megoldása:

$$\begin{aligned}
\sqrt{r \cdot r_a} + \sqrt{r \cdot r_b} + \sqrt{r \cdot r_c} &= \sqrt{\frac{pr^2}{p-a}} + \sqrt{\frac{pr^2}{p-b}} + \sqrt{\frac{pr^2}{p-c}} \\
&= \sqrt{\frac{p^2r^2(p-b)(p-c)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}} + \sqrt{\frac{p^2r^2(p-a)(p-c)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}} + \sqrt{\frac{p^2r^2(p-a)(p-b)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}} \\
&= \sqrt{(p-b)(p-c)} + \sqrt{(p-a)(p-c)} + \sqrt{(p-a)(p-b)}
\end{aligned}$$

Az utóbbi egyszerűsítésnél a háromszög ismert területképleteit alkalmaztuk: $T = pr$ és $T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.



Végül alkalmazzuk a $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x+y)$ közismert állítást:

$$\sqrt{r \cdot r_a} + \sqrt{r \cdot r_b} + \sqrt{r \cdot r_c} \leq \frac{1}{2}(p-b+p-c) + \frac{1}{2}(p-a+p-c) + \frac{1}{2}(p-a+p-b) =$$
$$= \frac{1}{2}(p-b+p-c+p-a+p-c+p-a+p-b) = \frac{1}{2}(6p-4p) = p.$$

Az állítás igazolt.

---

7. feladat: Legyen $a_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt{1\cdot 2} + \sqrt{2\cdot 3} + \ldots + \sqrt{n\cdot(n+1)}\right)$, ahol n nullától különböző természetes szám. Bizonyítsa be, hogy a_n egészrésze egyenlő $\frac{n+1}{2}$ egészrészével!

Kacsó Ferenc (Marosvásárhely)

7. feladat I. megoldása: Alkalmazva a $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ismert egyenlőtlenséget, és azt, hogy az egyenlőség csak $a=b$ esetben áll fenn, értékeljük az adott kifejezést felülről:

$$a_n < \frac{1}{n}\left(\frac{1+2}{2} + \frac{2+3}{2} + \ldots + \frac{n+(n+1)}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2n}\left((1+2+\ldots+n) + (2+3+\ldots+n+n+1)\right) =$$
$$= \frac{1}{2n}\left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+3)}{2}\right) = \frac{n+2}{2}.$$

Másrészt $a_n > \frac{1}{n}(1+2+\ldots+n) = \frac{n+1}{2}$. Tehát,

$$\frac{n+1}{2} < a_n < \frac{n+2}{2}.$$

Ha $n=2k$, ahol k nullától különböző természetes szám, akkor az előbbiből következik, hogy $k+\frac{1}{2} < a_n < k+1$, ami azt jelenti, hogy $[a_n] = k$. Ugyanakkor $\left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[k+\frac{1}{2}\right] = k$, tehát, ebben az esetben $[a_n] = \left[\frac{n+1}{2}\right]$. Ha $n = 2k+1$, ahol k természetes szám, akkor $k+1 < a_n < k+1+\frac{1}{2}$, melyből következik, hogy $[a_n] = k+1$. Másrészt, ebben az esetben $\left[\frac{n+1}{2}\right] = [k+1] = k+1$, ami ismét azt jelenti, hogy $[a_n] = \left[\frac{n+1}{2}\right]$. Így **az állítást igazoltuk**!