XIII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Nagydobrony, 2004. márc. 15-20.

11. osztály

1. feladat: Bizonyítsa be, hogy $9^n - 8n - 1$ osztható 64-gyel, ahol n nemnegatív egész szám.

Oláh György (Komárom)

1. feladat I. megoldása: A bizonyítást a matematikai indukció módszerével végezzük. $n = 1$-re az állítás igaz. Tegyük fel, hogy igaz $n = k$-ra, vagyis $9^k - 8k - 1$ osztható 64-gyel. Bebizonyítjuk, hogy ebben az esetben igaz $n = (k+1)$-re is, vagyis $9^{k+1} - 8(k+1) - 1$ is osztható 64-gyel. $9^{k+1} - 8(k+1) - 1 = 9 \cdot 9^k - 8k - 8 - 1 = 9\left(9^k - 8k - 1\right) + 64k$. Az első összeadandó osztható 64-gyel az indukciós feltételezés alapján, a második 64 többszöröse. Tehát, az összeg is osztható 64-gyel, azaz az állítás bizonyított.

---

2. feladat: Igazolja, hogy a különböző oldalú háromszögben a legkisebb szög csúcsából húzott szögfelező a leghosszabb!

Dr. Kántor Sándor (Debrecen)

2. feladat I. megoldása: Legyenek a, b és c a háromszög oldalai, α a háromszög legkisebb szöge (értelemszerűen a – a legkisebb oldala), l_a – e szög csúcsából húzott szögfelező. Akkor a háromszög területének kétszeresét kétféleképpen felírva, kapjuk: $bc \sin\alpha = bl_a \sin\frac{\alpha}{2} + cl_a \sin\frac{\alpha}{2}$. Ebből $l_a = \frac{bc\sin\alpha}{(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$. Ugyanígy $l_b = \frac{2ac\cos\frac{\beta}{2}}{a+c}$. Mivel $\alpha < \beta$ és a cos az első negyedben fogyó függvény, ezért $\cos\frac{\alpha}{2} > \cos\frac{\beta}{2}$. Megmutatjuk, hogy $\frac{b}{b+c} > \frac{a}{a+c}$.

$$\frac{b}{b+c} - \frac{a}{a+c} = \frac{b(a+c) - a(b+c)}{(b+c)(a+c)} = \frac{bc - ac}{(b+c)(a+c)} = \frac{c(b-a)}{(b+c)(a+c)} > 0,$$

ami az előbbi állítást igazolja. Tehát $l_a > l_b$. Hasonlóan kapjuk, hogy $l_a > l_c$. Vagyis l_a a leghosszabb szögfelező.

---

3. feladat: Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\sqrt{4x^2 - 4x + 2} = \frac{\sqrt{2} - \left(\sqrt{2x-1} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{1}{2x-1}}}$$

Bíró Bálint (Eger)

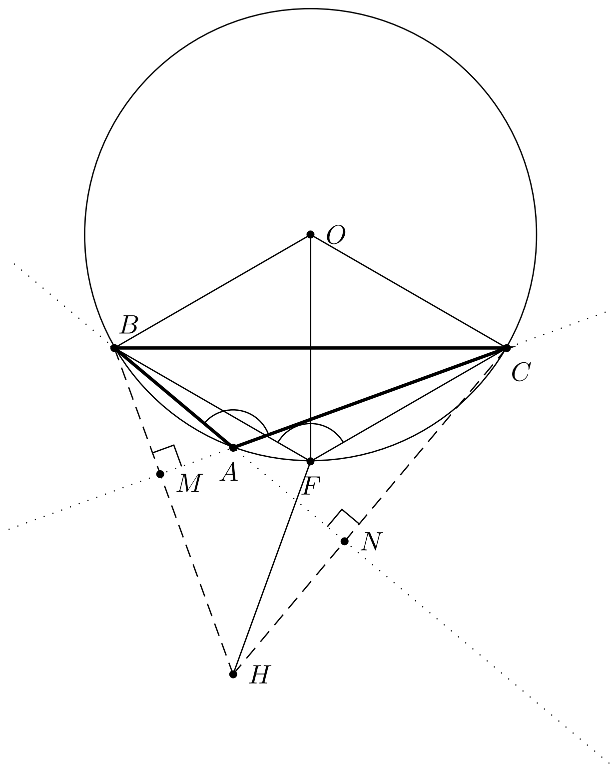
3. feladat I. megoldása: Átalakítjuk a kiinduló egyenletet: $\sqrt{(2x-1)^2 + 1} = \frac{\sqrt{2} - \left(\sqrt{2x-1} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{1}{2x-1}}}$. Nyilvánvaló, hogy $2x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{2}$. Legyen $2x - 1 = a$. Akkor $\sqrt{a^2+1} = \frac{\sqrt{2} - \left(\sqrt{a} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{1}{a}}}$, vagy $\sqrt{a + \frac{1}{a}} = \sqrt{2} - \left(\sqrt{a} - 1\right)^2$. Mivel a pozitív, ezért $a + \frac{1}{a} \geq 2$ és $\sqrt{a + \frac{1}{a}} \geq 2$. De akkor $\sqrt{a} - 1 = 0$ kell legyen, vagyis $a = 1$. Visszahelyettesítve: $2x - 1 = 1$, ahonnan **x=1**, és ez valóban gyöke az egyenletnek.

---

4. feladat: Az ABC háromszögben $AB = 4$ cm, $AC = 8$ cm, $A\angle = 120°$. Az F pont a háromszög köré írt kör BAC ívének felezőpontja. Mekkora távolságra van az F pont a háromszög magasságainak metszéspontjától?

Neubauer Ferenc (Munkács)

4. feladat I. megoldása: Meghúzzuk a háromszög BM és CN magasságvonalait, melyek metszéspontja legyen H.



A kerületi szögek tulajdonsága alapján $BOC\angle = 180° - \frac{1}{2}BAC\angle = 120°$. Ebből $BOF\angle = COF\angle = 60°$. Ez azt jelenti, hogy BOF és COF háromszögek szabályosak, vagyis $FB = FO = FC$. Ebből viszont az következik, hogy F – a BOC háromszög köré írt kör középpontja.

$MHNA$ négyszög – húrnégyszög, mivel két szemben fekvő szöge derékszög. MAN szög az adott BAC szög csúcsszöge, tehát szintén 120 fokos. Ebből BHC szög 60 fokos. Ebben az esetben viszont $BHC\angle + COB\angle = 180°$, ami azt jelenti, hogy $BOCH$ négyszög is húrnégyszög, vagyis a H pont rajta van a BOC háromszög köré írt körön. Ezért $FH = FO$.

Az ABC háromszögben a koszinusz-tétellel kiszámítjuk BC-t, majd az $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$ képlettel a köré írt kör sugarát.

$$BC^2 = 4^2 + 8^2 - 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot \cos 120° = 112,\ \ BC = 4\sqrt{7}$$

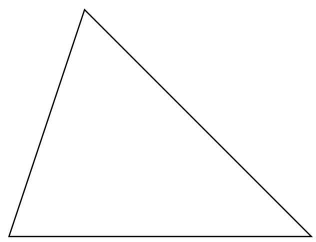
A keresett távolság $FO = \frac{4\sqrt{7}}{2\sin 120°} = \frac{4\sqrt{7}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{21}}{3} \approx 6,11.$

---

5. feladat: A P és Q pontok úgy helyezkednek el az ABC háromszög BC oldalán, hogy a létrejövő szakaszok aránya: $BP : PQ : QC = 1 : 2 : 3$. Az R pont a háromszög AC oldalát a következőképpen harmadolja: $AR : RC = 1 : 2$. Az M és N pontok a BR szakasznak az AQ és az AP szakaszokkal való metszéspontjait jelöli. Határozza meg a $PQMN$ négyszög területét, ha az ABC háromszög területe 24 cm^2.

Dr. Pintér Ferenc (Nagykanizsa)

5. feladat I. megoldása: Jelölje F az RC felezőpontját. Akkor $QF \parallel BR$; $AR = RE$ és $AM = MQ$. Közben bebizonyítottunk egy később még egyszer felhasználható állítást: a háromszög egyik harmadoló vonala felezi a harmadoló ponthoz közelebb fekvő csúcsból húzott súlyvonalat.



Ha az ABC háromszög területét T-vel jelöljük, akkor a következő egyenlőségek írhatók:

$$T_{AQC} = \frac{1}{2}T$$
$$T_{ABM} = \frac{1}{2}T_{ABQ} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}T = \frac{1}{4}T$$
$$T_{BPN} = T_{ABP} - T_{ABN} = \frac{1}{6}T - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}T = \left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)T = \frac{1}{24}T.$$

Az ABN háromszög területének kiszámításánál felhasználtuk a fenti állítást, miszerint az ABQ háromszög AP harmadoló vonala felezi a BM súlyvonalat. Végül, a keresett terület: $T_{PQMN} = T - T_{AQC} - T_{ABM} - T_{BPN} = T - \frac{1}{2}T - \frac{1}{4}T - \frac{1}{24}T = \frac{5}{24}T = \frac{5}{24}\cdot 24 = 5$ (cm^2)

---

6. feladat: Bizonyítsa be, hogy ha az a, b és c valós számokra teljesül a $0 < a < b < c$ feltétel, akkor az $(a+b+c)\,x^2 - 2\,(ab+bc+ac)\,x + 3abc = 0$ egyenletnek két különböző valós gyöke van, és az egyik gyök az a és b közé, a másik a b és c közé esik.

Dr. Katz Sándor (Bonyhád)

6. feladat I. megoldása: Meghatározzuk az $f(x) = (a+b+c)\,x^2 - 2\,(ab+bc+ac)\,x + abc$ függvény előjelét az a, b és c pontokban:

$$f(a) = (a+b+c)\,a^2 - 2\,(ab+bc+ac)\,a + abc = a\left(a^2 - ab - ac - bc\right) = a\,(a-b)\,(a-c) > 0$$
$$f(b) = b\,(b-c)\,(b-a) < 0$$
$$f(c) = c\,(c-a)\,(c-b) > 0.$$

Mivel a másodfokú függvény folytonos az egész számegyenesen, ebből következik, hogy a és b között, valamint b és c között feltétlenül van egy-egy zérushely.

---

7. feladat: Egy háromszög egyik csúcsából kiinduló magasság, szögfelező és oldalfelező az illető szöget rendre x, y, x, y szögekre osztja. Igazolja, hogy $\sin^3(x+y) = \sin x \cos y$.

Bencze Mihály (Brassó)

7. feladat I. megoldása: Az ABC háromszögben $B\angle = 90^\circ - x$; $C\angle = 90^\circ - (x+2y)$. Alkalmazzuk a szinusz-tételt az ABF és AFC háromszögekben: $\frac{AF}{\sin(90^\circ - x)} = \frac{BF}{\sin(2x+y)}$; $\frac{AF}{\sin(90^\circ - x - 2y)}$. Ezekből figyelembe véve a $BF = CF$ egyenlőséget, kapjuk: $\frac{AF}{BF} = \frac{\sin(90^\circ - x)}{\sin(2x+y)} = \frac{\cos x}{\sin(2x+y)}$; $\frac{AF}{CF} = \frac{\sin(90^\circ - x - 2y)}{\sin y} = \frac{\cos(x+2y)}{\sin y}$. Vagyis $\frac{\cos x}{\sin(2x+y)} = \frac{\cos(x+2y)}{\sin y}$. Ebből néhány átalakítással, az összeggé alakítás és a $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ képlet felhasználásával megkapjuk a bizonyítandó állítást.

$$\sin y \cos x = \sin(2x+y)\cdot\cos(x+2y)$$
$$\sin(y-x) + \sin(y+x) = \sin(2x+y-(x+2y)) + \sin(2x+y+(x+2y))$$

$$\begin{aligned}
\sin\left(y-x\right)+\sin\left(y+x\right) &= \sin\left(x-y\right)+\sin\left(3x+3y\right)\\
\sin 3\left(x+y\right) &= 2\sin\left(y-x\right)+\sin\left(y+x\right)\\
3\sin\left(x+y\right)-4\sin^3\left(x+y\right) &= 2\sin\left(y-x\right)+\sin\left(y+x\right)\\
4\sin^3\left(x+y\right) &= 2\sin\left(x+y\right)+2\sin\left(x-y\right)\\
\sin^3\left(x+y\right) &= \sin\frac{x+y+x-y}{2}\cos\frac{x+y-x+y}{2}=\sin x\cos y.
\end{aligned}$$