XII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Eger, 2003. ápr. 15-19.

12. osztály

1. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán a $6 \cdot \frac{x^2+1}{x^2+11} = \sqrt{\frac{11x-6}{6-x}}$ egyenletet!

Kubatov Antal (Kaposvár)

1. feladat I. megoldása: Tekintsük a jobboldalt a függvényt, ennek egyenlete: $y = \sqrt{\frac{11x-6}{6-x}}$.
Ezt x-re rendezve $x = \frac{6\cdot(y^2+1)}{y^2+11}$ adódik.

Látható tehát, hogy ha az egyik oldalt x függvényének tekintjük, akkor a másik oldal az előbbi inverz függvénye. A két függvény képe egymás tükörképe az $y = x$ egyenletű egyenesre, ezért a metszéspontjaik az $y = x$ egyenletű egyenesen vannak. Így elegendő a $\frac{6(x^2+1)}{x^2+11} = x$ egyenletet vizsgálni.

Rendezés után:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0. \tag{1}$$

(1) bal oldala könnyen szorzattá alakítható:

$$(x-1)(x-2)(x-3) = 0. \tag{2}$$

Megoldásként $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ adódik, melyek igazzá is teszik az eredeti egyenlőséget.

---

2. feladat: Az $f(x)$ függvényre tetszőleges x valós szám esetén teljesül, hogy $2\cdot f(x)+f(1-x) = x^2$. Milyen n pozitív egész számra igaz, hogy $f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = 19 \cdot n$?

Némethy Katalin (Budapest)

2. feladat I. megoldása: A feltétel szerint minden valós x-re teljesül, hogy

$$2 \cdot f(x) + f(1-x) = x^2. \tag{3}$$

Helyettesítsünk (1)-ben x helyébe $1 - x$-et!

$$2 \cdot f(1-x) + f(x) = (1-x)^2. \tag{4}$$

Szorozzuk be (1) mindkét oldalát 2-vel!

$$4 \cdot f(x) + 2 \cdot f(1-x) = 2 \cdot x^2. \tag{5}$$

A (3) és (2) egyenletek megfelelő oldalainak különbségét véve azt kapjuk, hogy: $3 \cdot f(x) = 2 \cdot x^2 - (1-x)^2$, innen pedig

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{3}. \tag{6}$$

Mivel (4) bármely valós x-re igaz, ezért:

$$\begin{aligned} f(1) &= \tfrac{1^2+2\cdot 1-1}{3}, \\ f(2) &= \tfrac{2^2+2\cdot 2-1}{3}, \\ &\vdots \\ f(n) &= \tfrac{n^2+2\cdot n-1}{3}. \end{aligned}$$

Adjuk össze a kapott egyenletek megfelelő oldalait! Ekkor:

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2+2\cdot(1+2+\ldots+n)-n}{3}. \tag{7}$$

Ismeretes, hogy $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$ és $1+2+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ ezért

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=\frac{\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}+2\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}-n}{3},$$

ahonnan rendezés után az alábbi összefüggés adódik:

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=\frac{2n^2+9n+1}{18}\cdot n. \tag{8}$$

A feltétel miatt $\frac{2n^2+9n+1}{18}\cdot n=19\cdot n$, ahonnan az $n\neq 0$-val való osztás után a $2n^2+9n-341=0$ egyenletre jutunk, amelynek megoldásai: $n_1=11$ és $n_2=-15,5$.

Az n_2 nyilván nem felel meg a feltételnek, a feladat kérdésére tehát $n_1=11$ a válasz.

Ellenőrizhető, hogy valóban $f(1)+f(2)+\ldots+f(11)=19\cdot 11=209$.

---

3. feladat: Az x_n sorozatot a következőképpen definiáljuk: $x_1=\frac{1}{2}$, és $x_{k+1}={x_k}^2+x_k$. Határozzuk meg az $S_{100}=\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\ldots+\frac{1}{x_{100}+1}$ összeg egész részét!

Kántor Sándorné (Debrecen)

3. feladat I. megoldása: Az $x_1=\frac{1}{2}$ értéke és a rekurziós feltétel miatt a sorozat minden tagja pozitív szám. A feltételt ennek figyelembevételével átalakítjuk:

$$x_{k+1}=x_k(1+x_k)$$

illetve

$$\frac{1}{x_{k+1}}=\frac{1}{x_k\cdot(x_{k+1}+1)}=\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_k+1}.$$

Így:

$$\frac{1}{x_k+1}=\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_{k+1}}.$$

Ezért $S_{100}=\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\ldots+\frac{1}{x_{100}+1}=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_{100}}-\frac{1}{x_{101}}=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{101}}=2-\frac{1}{x_{101}}$.

Az x_n sorozat szigorúan monoton növekvő: pl $x_1=\frac{1}{2}$; $x_2=\frac{3}{4}$; $x_3=\frac{21}{16}>1$, és $x_{k+1}-x_k={x_k}^2>0$ vagyis $x_{101}>x_3>1$; $0<\frac{1}{x_{101}}<1$.

Tehát $S_{100}=2-\frac{1}{x_{101}}<2$, vagyis S_{100} egész része: 1.

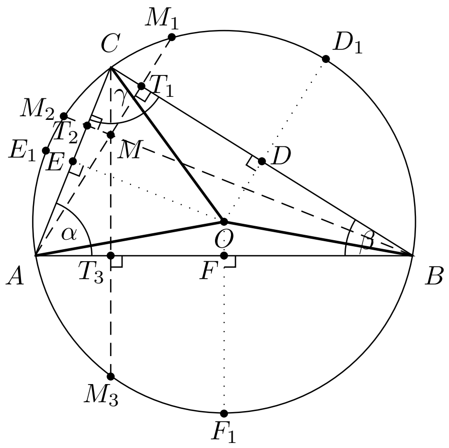
---

4. feladat: Az ABC hegyesszögű háromszög magasságainak a BC, CA és AB oldalakon lévő talppontjai rendre T_1, T_2 és T_3, a háromszög magasságpontja M, körülírt és beírt körének a sugara R és r. Bizonyítsuk be, hogy

$$MT_1\cdot MT_2\cdot MT_3\leq\frac{R\cdot r^2}{2}!$$

Bíró Bálint (Eger)

4. feladat I. megoldása: Jelöléseink az ábrán láthatók.



Mivel ABC háromszög hegyesszögű, ezért az M magasságpont és a körülírt kör O középpontja a háromszög belső pontja. Felhasználjuk azt az ismert tételt, hogy az M pontnak az oldalakra vonatkozó tükörképei a körülírt körön vannak (az ábrán M_1, M_2 és M_3 pontok), és hogy az O pontból az oldalakra bocsátott merőlegesek felezik az oldalakat és a megfelelő íveket (D, E, F, illetve D_1, E_1, F_1 pontok). A felhasznált tétel miatt $MT_1 = M_1T_1$, $MT_2 = M_2T_2$ és $MT_3 = M_3T_3$. Nyilvánvaló, hogy $M_1T_1 \leq DD_1$, $M_2T_2 \leq EE_1$ és $M_3T_3 \leq FF_1$. Így egyrészt $MT_1 \leq DD_1$, $MT_2 \leq EE_1$ és $MT_3 \leq FF_1$, másrészt

$$MT_1 \cdot MT_2 \cdot MT_3 \leq DD_1 \cdot EE_1 \cdot FF_1. \tag{9}$$

A kerületi és a középponti szögek összefüggéséből következik, hogy $BOD\angle = \alpha$, $COE\angle = \beta$, $AOF\angle = \gamma$, ezért $OD = R \cdot \cos\alpha$, $OE = R \cdot \cos\beta$ és $OF = R \cdot \cos\gamma$. Ekkor $DD_1 = R - R\cos\alpha = R \cdot (1 - \cos\alpha)$, $EE_1 = R - R\cos\beta = R \cdot (1 - \cos\beta)$ és $FF_1 = R - R\cos\gamma = R \cdot (1 - \cos\gamma)$. A kapott eredményeket (1)-be írva

$$MT_1 \cdot MT_2 \cdot MT_3 \leq R^3 \cdot (1 - \cos\alpha) \cdot (1 - \cos\beta) \cdot (1 - \cos\gamma). \tag{10}$$

Az a oldalra felírt koszinusztételből következik, hogy $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ és ezért $1 - \cos\alpha = \frac{a^2+(b-c)^2}{2bc}$ azaz $1-\cos\alpha = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$. A háromszög félkerületét s-sel jelölve $1-\cos\alpha = \frac{2\cdot(s-b)(s-c)}{bc}$ Hasonlóan kapjuk, hogy $1-\cos\beta = \frac{2\cdot(s-a)(s-c)}{ac}$ és $1-\cos\gamma = \frac{2\cdot(s-a)(s-b)}{ab}$. Ezért $(1-\cos\alpha)\cdot(1-\cos\beta)\cdot(1-\cos\gamma) = \frac{8\cdot(s-a)^2\cdot(s-b)^2\cdot(s-c)^2}{a^2\cdot b^2\cdot c^2}$.

Felhasználva a háromszög területére vonatkozó Héron-képletet, az $a \cdot b \cdot c = 4R \cdot T$ és a $\frac{T}{s} = r$ összefüggéseket, adódik, hogy $(1 - \cos\alpha) \cdot (1 - \cos\beta) \cdot (1 - \cos\gamma) = \frac{r^2}{2R^2}$. Ezt (2)-be helyettesítve éppen a bizonyítandó $MT_1 \cdot MT_2 \cdot MT_3 \leq \frac{Rr^2}{2}$ állítást kapjuk.

Egyenlőség nyilván akkor van, ha $M_1T_1 = DD_1$, $M_2T_2 = EE_2$, $M_3T_3 = FF_1$, ez viszont csak szabályos háromszög esetén áll fenn.

---

5. feladat: Határozzuk meg azokat az x, y valós számokat melyekre $x^{\log_3 y} + y^{\log_x 3} + 3^{\log_3 x} = x + y + 3$!

Kovács Béla (Szatmárnémeti)

5. feladat I. megoldása: Az egyenletben szereplő kifejezések értelmezve vannak, ha x és y szigorúan pozitív és 1-től különböző valós számok.

Vizsgáljuk az egyenlőséget, amikor x és y a $(0,1)$ illetve az $(1,\infty)$ intervallumok valamelyikéhez tartozik!

Először legyenek x és y 1-nél nagyobb valós számok. Ekkor pozitív számokra alkalmazható számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség és az ugyancsak pozitív a számra vonatkozó ismert $a + \frac{1}{a} \geq 2$

egyenlőtlenség alkalmazásával:

$$\begin{aligned}
x^{\log_3 y} + x^{\log_y 3} &\geq 2 \cdot \sqrt{x^{\log_3 y + \log_y 3}} \geq 2 \cdot \sqrt{x^2} = 2x \\
y^{\log_x 3} + y^{\log_3 x} &\geq 2 \cdot \sqrt{y^{\log_x 3 + \log_3 x}} \geq 2 \cdot \sqrt{y^2} = 2y \\
3^{\log_y x} + 3^{\log_x y} &\geq 2 \cdot \sqrt{3^{\log_y x + \log_x y}} \geq 2 \cdot \sqrt{3^2} = 6.
\end{aligned}$$

Összeadva a kapott egyenlőtlenségek megfelelő oldalait és felhasználva az $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ egyenlőséget, majd mindkét oldalt 2-vel osztva kapjuk, hogy:

$$x^{\log_3 y} + y^{\log_x 3} + 3^{\log_y x} \geq x + y + 3.$$

Egyenlőség csak $x = y = 3$ esetén van.

Ha x és y 1-nél kisebb pozitív valós számok, akkor $y^{\log_x 3} + 3^{\log_y x} = 3^{\log_x y} + 3^{\log_y x} \geq 2 \cdot \sqrt{3^{\log_y x + \log_x y}} \geq 2 \cdot \sqrt{3^2} = 6$ és $x^{\log_3 y} > 1$ alapján az egyenlet bal oldala 7-nél nagyobb, jobb oldala 5-nél kisebb, tehát egyenlőség nem lehetséges.

Ha x 1-nél kisebb, y pedig 1-nél nagyobb, akkor $x^{\log_3 y} < 1$, $y^{\log_x 3} < 1$ és $3^{\log_y x} < 1$ alapján az egyenlet bal oldala 3-nál kisebb, jobb oldala 4-nél nagyobb, egyenlőség ismét nem lehetséges. Hasonlóan nincs megoldás akkor sem, ha x 1-nél nagyobb, y pedig 1-nél kisebb.

Az egyenlet megoldása tehát az $x = 3$, $y = 3$ számpár.

---

6. feladat: Oldjuk meg a valós számhármasok halmazán a következő egyenletet:

$$\sqrt{5\left(x^2 + 2yz\right)} + \sqrt{6\left(z^2 + 2zx\right)} + \sqrt{5\left(z^2 + 2xy\right)} = 4(x + y + z)!$$

Pintér Ferenc (Nagykanizsa)

6. feladat I. megoldása: Egyrészt az egyenlet bal oldala miatt $x + y + z \geq 0$, másrészt ez az oldal felírható az $\left(\sqrt{5}; \sqrt{6}; \sqrt{5}\right)$ és a $\left(\sqrt{x^2 + 2yx}; \sqrt{y^2 + 2zx}; \sqrt{z^2 + 2xy}\right)$ vektorok skaláris szorzataként. A jobb oldalon pedig ezen vektorok nagyságának szorzata áll. Ez pedig a feltételek miatt akkor és csak akkor állhat fenn, ha

$$\frac{x^2 + 2yz}{5} = \frac{y^2 + 2zx}{6} = \frac{y^2 + 2xy}{5}.$$

Ebből az egyenletrendszerből $x^2 - z^2 = 2y(x - z)$ adódik, így vagy $x = z$, vagy $x + z = 2y$ lehetséges.

Ha $x = z$, akkor $\frac{x^2+2yz}{5} = \frac{y^2+2x^2}{6}$ azaz $4x^2 - 12xy + 5y^2 = 0$, ahonnan $y = \frac{2}{5}x$ vagy $y = 2x$ adódik. Ezekből kapjuk a következő megoldásokat: $\left(a; \frac{2}{5}a; a\right)$ és $(a; 2a; a)$, ahol a tetszőleges nemnegatív szám.

Ha $x + z = 2y$, azaz $z = 2y - x$, akkor visszahelyettesítve a következőkhöz jutunk: $\frac{x^2+2y(2y-x)}{5} = \frac{y^2+2x(2y-x)}{6}$, amelyből $16x^2 - 32xy + 19y^2 = 0$ adódik. Ennek az egyenletnek csak az $x = y = 0$ triviális megoldása van a valós számok körében, mert az egyenlet diszkriminánsa negatív: $D = 4(16^2 - 16 \cdot 19) < 0$. Így ebben az esetben $z = 0$, ekkor a megoldás tehát: $(0; 0; 0)$.