XII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Eger, 2003. ápr. 15-19.

11. osztály

1. feladat: Bizonyítsuk be, hogy a $23, 203, 2003, 20003\ldots$ sorozatban végtelen sok 7-tel osztható szám van!

Benedek Ilona (Budapest)

1. feladat I. megoldása: Könnyen látható, hogy 203 osztható 7-tel.

Tekintsük a 2000...03 számot! Ez felírható $(203-3)\cdot 10^n - 3$ alakban, és ebben a számban a 0-ák száma $n+1$ (n természetes szám).

Ezzel:

$$(203-3)\cdot 10^n + 3 = 203\cdot 10^n - 3\cdot(10^n - 1).$$

Azt kell megvizsgálni, hogy a $10^n - 1$ milyen n-ekre osztható 7-tel.

Megmutatjuk, hogy $n = 6k$ megfelelő. Ekkor:

$$10^{6k} - 1 = (10^6)^k - 1 = (10^6 - 1)\cdot(10^{6k-6} + 10^{6k-12} + \ldots + 1)$$
$$10^6 - 1 = (10^3-1)\cdot(10^3+1) = (10^3-1)\cdot 1001 = (10^3-1)\cdot 7\cdot 143.$$

Ebből látható, hogy $10^n - 1$ mindig osztható 7-tel, ha $n = 6k$, vagyis a sorozat minden olyan tagja osztható 7-tel, amelyben a 0-ák száma $6k+1$, ahol k természetes szám. A sorozat nyilván végtelen sok ilyen számot tartalmaz.

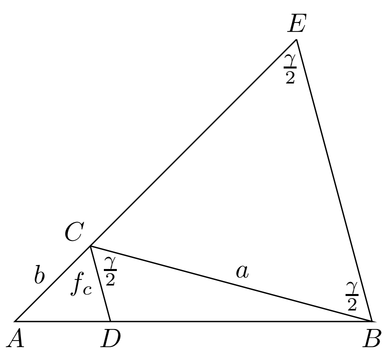
---

2. feladat: Milyen tulajdonságú az a háromszög, amelynek két oldala és a harmadik oldalhoz tartozó f_c szögfelezője között a következő összefüggés érvényes:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_c}$$

Pintér Ferenc (Nagykanizsa)

2. feladat I. megoldása: A feltételből következik, hogy $f_c = \frac{ab}{a+b}$.



Mérjük fel az AC oldal meghosszabbítására a $CE = CB$ szakaszt! A BCE háromszög egyenlő szárú ezért a BE alapon fekvő szögei a külső szög tételéből adódóan $\frac{\gamma}{2}$-vel egyenlők. Így az $ADC\triangle$ hasonló az $ABE\triangle$-höz, ezért a megfelelő oldalaik aránya is egyenlő: $f_c : b = BE : (a+b)$, vagyis $f_c = \frac{BE\cdot b}{a+b}$.

Utóbbi egyenlet és a feltételi egyenlet összehasonlításából adódik, hogy $BE = a$, tehát $BCE\triangle$ szabályos, és így $\frac{1}{2}\gamma = 60°$, azaz $\gamma = 120°$.

Az $ABC\triangle$-ről tehát annyit mondhatunk, hogy legnagyobb szöge $120°$-os.

---

3. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán a $\log_3(2^x + 5) = \log_2(3^x - 5)$ egyenletet!

Orbán Edit (Zalaegerszeg)

3. feladat I. megoldása: Vizsgáljuk a következő két függvényt:

$$f : \mathbb{R} \to]\log_3 5; +\infty[\quad f(x) = \log_3(2^x + 5)$$
$$g :]\log_3 5; +\infty[\to \mathbb{R} \quad g(x) = \log_2(3^x - 5)$$

Mivel a két függvény egymás inverze, ezért grafikonjuk az $y = x$ egyenletű egyenesre szimmetrikus, így grafikonjaik csak ezen az egyenesen metszhetik egymást. Ezért az egyenletnek olyan x szám a megoldása, melyre $\log_3(2^x + 5) = x = \log_2(3^x - 5)$, vagyis $2^x + 5 = 3^x$. Ebből a $3^x - 2^x = 5$ egyenletet kapjuk, aminek csak a pozitív számok halmazában lehet gyöke, hiszen $x \leq 0$ esetén $3^x \leq 2^x$.

Az $x = 2$ nyilván megoldás, több megoldás pedig azért nincs, mert a $3^x - 2^x$ függvény a pozitív számok halmazán szigorúan monoton nő, ezért minden értéket csak egyszer vesz fel.

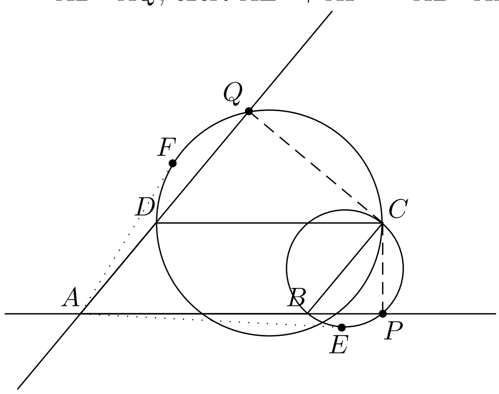
---

4. feladat: Az $ABCD$ parallelogrammában A-nál hegyesszög van. Rajzoljunk a BC és CD oldalak, mint átmérők fölé köröket, és az A pontból húzzunk érintőket ezekhez a körökhöz, az érintési pontok legyenek E és F. Bizonyítsuk be, hogy az AC, AE és AF szakaszokból derékszögű háromszög szerkeszthető!

Balogh János (Kaposvár)

4. feladat I. megoldása: Készítsünk a feltételeknek megfelelő ábrát!

Legyen P és Q a C pontból az AB és AD oldalegyenesekre állított merőlegesek talppontja. A Thalész-tétel miatt P és Q a körökön vannak. A külső pontból a körökhöz húzott szelő-és érintőszakaszok tétele szerint $AE^2 = AB \cdot AP$ és $AF^2 = AD \cdot AQ$, ezért $AE^2 + AF^2 = AB \cdot AP + AD \cdot AQ$.



Ha a paralellogramma A-nál levő szöge α, akkor $BP = BC \cdot \cos\alpha$ és $DQ = DC \cdot \cos\alpha$, tehát $AP = AB + BP = AB + BC \cdot \cos\alpha$, illetve $AQ = AD + DQ = BC + DQ = BC + CD \cdot \cos\alpha = BC + AB \cdot \cos\alpha$.

Emiatt $AB \cdot AP = AB^2 + AB \cdot BC \cdot \cos\alpha$ és $AD \cdot AQ = BC \cdot AQ = BC^2 + AB \cdot BC \cdot \cos\alpha$.

Ebből következik, hogy

$$AB \cdot AP + AD \cdot AQ = AB^2 + BC^2 + 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\alpha = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(180° - \alpha) \quad (1)$$

Az (1) összefüggés viszont nem más, mint az $ABC\triangle$-ben az AC oldalra felírt koszinusztétel, így tehát

$$AE^2 + AF^2 = AC^2 \quad (2)$$

A Pitagorasz tétel megfordítása miatt (2) éppen azt jelenti, hogy AC, AE és AF szakaszokból derékszögű háromszög szerkeszthető.

5. feladat: Melyik az a legkisebb p pozitív prímszám, amelyre az $\frac{x^2-2x-13}{\sqrt{x^2-2x-14}} = 2 \cdot \sin \frac{\pi \cdot x + p \cdot \pi}{4}$ egyenletnek van olyan pozitív egész megoldása, hogy $x \leq p$ teljesül?

Bíró Bálint (Eger)

5. feladat I. megoldása: Nyilvánvaló, hogy $x^2 - 2x - 14 > 0$. Az $f(x) = x^2 - 2x - 14$ függvény zérushelyei: $x_1 = 1 - \sqrt{15}$ és $x_2 = 1 + \sqrt{15}$. Ebből következően $x < 1 - \sqrt{15}$, vagy $x > 1 + \sqrt{15}$. Mivel x egész szám kell, hogy legyen és $1 - \sqrt{15} > 1 - \sqrt{16}$, illetve $1 + \sqrt{15} < 1 + \sqrt{16}$, azaz $1 - \sqrt{15} > -3$ és $1 + \sqrt{15} < 5$, ezért $x \leq -3$ vagy $x \geq 5$, ugyanakkor x pozitív egész, így csak az $x \geq 5$ feltételt vesszük figyelembe.

A kiinduló egyenletet átalakítjuk:

$$\frac{x^2 - 2x - 14 + 1}{\sqrt{x^2 - 2x - 14}} = 2 \cdot \sin \frac{\pi \cdot x + p \cdot \pi}{4}.$$

Legyen most $\sqrt{x^2 - 2x - 14} = a$! Ekkor $\frac{a^2+1}{a} = 2 \cdot \sin \frac{\pi \cdot x + p \cdot \pi}{4}$, vagyis $a + \frac{1}{a} = 2 \cdot \sin \frac{\pi \cdot x + p \cdot \pi}{4}$.

A feltételek miatt $a > 0$, ezért $a + \frac{1}{a} \geq 2$ egy ismert egyenlőtlenség szerint. Ezért $2 \cdot \sin \frac{\pi \cdot x + p \cdot \pi}{4} \geq 2$ azaz $\sin \frac{\pi \cdot x + p \cdot \pi}{4} \geq 1$. Ez csak úgy lehetséges, ha $\sin \frac{\pi \cdot x + p \cdot \pi}{4} = 1$, vagyis ha $\sin \frac{\pi \cdot x + p \cdot \pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$ (k egész szám).

Ebből rendezés után

$$x + p = 2 + 8k \tag{3}$$

következik. Ugyanakkor $a + \frac{1}{a} = 2$ is igaz, ebből pedig $a = 1$ adódik.

Eszerint $\sqrt{x^2 - 2x - 14} = 1$, ahonnan $x^2 - 2x - 15 = 0$ kapható. Ennek az egyenletnek a gyökei $x_1 = 5$ és $x_2 = -3$. Ezek közül csak az $x_1 = 5$ pozitív egész szám, és ez megfelel az $x \geq 5$ feltételnek is. Vessük ezt össze (1)-gyel! Ekkor $5 + p = 2 + 8k$, tehát $p = 8k - 3$.

Mivel p pozitív prímszám, ezért a legkisebb keresett p a $k = 1$-ből következő $p = 5$ prímszám. Erre az a feltétel is teljesül, hogy $x \leq p$. Végeredményünk szerint a $p = 5$ az a legkisebb pozitív prímszám, amelyre a kiinduló egyenletnek van olyan pozitív egész megoldása, hogy $x \leq p$ is igaz. Ez a megoldás az $x = 5$. Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ez valóban gyöke az eredeti egyenletnek.

---

6. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha $1 \leq x_1 \leq 2, 1 \leq x_2 \leq 2, \ldots, 1 \leq x_n \leq 2$ (n természetes szám), akkor

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1 + \frac{2}{x_n}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2 + \frac{2}{x_{n-1}}} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{x_n + \frac{2}{x_1}} \geq \frac{n}{8}!$$

Kacsó Ferenc (Marosvásárhely)

6. feladat I. megoldása: Ha $1 \leq x_k \leq 2$, akkor $(x_k - 1) \cdot (x_k - 2) \leq 0$, vagyis $x_k^2 - 3x_k + 2 \leq 0$, innen pedig

$$x_k + \tfrac{2}{x_k} \leq 3 \quad (k = 1, 2, \ldots n) \tag{4}$$

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlötlenséget és az (1)-ben szereplö összefüggéseket:

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^{x_1 + \frac{2}{x_n}} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{x_2 + \frac{2}{x_{n-1}}} + \ldots + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{x_n + \frac{2}{x_1}} \geq n \cdot \sqrt[n]{\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\left(x_1 + \frac{2}{x_n}\right) + \left(x_2 + \frac{2}{x_{n-1}}\right) + \ldots + \left(x_n + \frac{2}{x_1}\right)}} =$$

$$= n \cdot \sqrt[n]{\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{2}{x_2}\right) + \ldots + \left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)}}$$

ezért

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^{x_1 + \frac{2}{x_n}} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{x_2 + \frac{2}{x_{n-1}}} + \ldots + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{x_n + \frac{2}{x_1}} \geq n \cdot \sqrt[n]{\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{2}{x_2}\right) + \ldots + \left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)}} \geq$$

$$\geq n \cdot \sqrt[n]{\left(\tfrac{1}{2}\right)^{3 + 3 + \ldots + 3}} = n \cdot \sqrt[n]{\left(\tfrac{1}{2}\right)^{3n}} = \tfrac{n}{8}.$$

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.