XII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Eger, 2003. ápr. 15-19.

10. osztály

1. feladat: Határozzuk meg az a és b egész számokat, amelyekre az $x^2 - ax + 2a + b^2 = 0$ egyenlet gyökei közvetlen egymás utáni természetes számok!

Kacsó Ferenc (Marosvásárhely)

1. feladat I. megoldása: Ha az egyenlet gyökei $x_1 = n$ és $x_2 = n + 1$, ahol n természetes szám, akkor a gyökök és együtthatók összefüggései szerint:

$$x_1 + x_2 = 2n + 1 = a \tag{1}$$

$$x_1 x_2 = n(n + 1) = 2a + b^2 \tag{2}$$

Kiküszöböljük az n-et:
(1)-ből $n = \frac{a-1}{2}$, innen pedig (2) alapján $\frac{a-1}{2}\frac{a+1}{2} = 2a + b^2$, azaz $a^2 - 8a - 1 = 4b^2$ illetve

$$(a - 4)^2 - 4b^2 = 17 \tag{3}$$

Szorzattá alakítva (3) jobb oldalát:

$$(a - 4 - 2b)(a - 4 + 2b) = 17 \tag{4}$$

Mivel a és b egész számok, ezért (4) a következő esetekben teljesülhet:

a) a) $a - 4 - 2b = 1$ és $a - 4 + 2b = 17$

b) b) $a - 4 - 2b = 17$ és $a - 4 + 2b = 1$

c) c) $a - 4 - 2b = -1$ és $a - 4 + 2b = -17$

d) d) $a - 4 - 2b = -17$ és $a - 4 + 2b = -1$

Az a) és b) esetekből $a = 13$ és $b \pm 4$, a c) és d) esetekből pedig $a = -5$ és $b = \pm 4$ következik.

Az $a = 13$, $b \pm 4$ esetén az egyenlet a következő: $x^2 - 13x + 42 = 0$, ennek gyökei $x_1 = 6$, $x_2 = 7$, és ezek valóban egymás utáni természetes számok.

Az $a = -5$, $b = \pm 4$ esetén az egyenlet: $x^2 + 5x + 6 = 0$, amelynek gyökei $x_1 = -3$, $x_2 = -2$. Ezek nem természetes számok, ezért nem felelnek meg a feladat feltételeinek.

A keresett egész számok tehát a $a = 13$ és $b = \pm 4$.

---

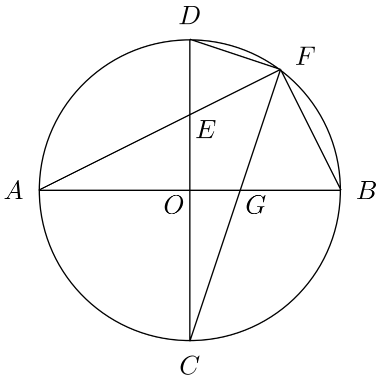
2. feladat: Az AB és CD egy O középpontú körnek két, egymásra merőleges átmérője. Az OD szakaszt felező E ponton halad át az AF húr, az AB és CF szakaszok metszéspontja G. Bizonyítsuk be, hogy

$$OB = 3 \cdot OG$$

$$CF = 3 \cdot DF.$$

Pintér Ferenc (Nagykanizsa)

2. feladat I. megoldása: a./ Jelölje a kör sugarát r!



Az $AOE\triangle$ hasonló az $AFB\triangle$-höz mert két-két megfelelő szögük egyenlő ($AFB\angle$ a Thalesz-tétel miatt derékszög). Ugyanakkor $BFC\angle = CFA\angle = AFD\angle$ (azonos hosszúságú ívekhez tartozó kerületi szögek), ezért GF szögfelező az $AFB\triangle$-ben, tehát

$$\frac{AG}{GB} = \frac{AF}{BF} = \frac{2}{1},$$

amiből

$$OG = r - \frac{2}{3}r = \frac{1}{3}r = \frac{1}{3}OB,$$

azaz $OB = 3 \cdot OG$ adódik.

b./ Mivel $DE = \frac{1}{2}r$ és $CE = \frac{3}{2}r$, ezért ha figyelembe vesszük, hogy EF szögfelező a $CFD\triangle$-ben, akkor $\frac{DF}{CF} = \frac{DE}{CE} = \frac{1}{3}$, azaz $CF = 3 \cdot DF$, és ezzel a feladat mindkét állítását bebizonyítottuk.

---

3. feladat: Bizonyítsuk be, hogy $3^{2000} + 4$ szám pozitív osztóinak száma összetett szám!

Erdős Gábor (Nagykanizsa)

3. feladat I. megoldása: Először lássuk be, hogy a $3^{2000} + 4$ szám összetett szám!

Tudjuk, hogy a 3 hatványainak utolsó számjegyei 4-esével periodikusan ismétlődnek, ezért a 3^{2000} szám 1-re vagyis $3^{2000} + 4$ szám 5-re végződik. A szám osztható 5-tel és nagyobb 5-nél, tehát összetett szám. Osztóinak száma ezért 2-nél több.

Most lássuk be, hogy a $3^{2000} + 4$ szám nem lehet négyzetszám!

Alkalmazzunk indirekt bizonyítást! Tegyük fel, hogy van olyan a egész szám, amelyre

$$3^{2000} + 4 = a^2$$

Ekkor

$$3^{2000} = a^2 - 4 = (a-2) \cdot (a+2).$$

A jobb oldali szorzat mindkét tényezője a 3 hatványa, ami viszont nem lehetséges, mivel különbségük 4. Beláttuk tehát, hogy a $3^{2000} + 4$ szám nem lehet négyzetszám, akkor viszont páros sok pozitív osztója van.

A $3^{2000} + 4$ pozitív osztóinak száma tehát 2-nél nagyobb és páros vagyis a pozitív osztók száma összetett szám.

---

4. feladat: Az $a_1, a_2, \ldots, a_{16}$ sorozat bármely három szomszédos tagjának összege 5, 6, 7 vagy 8. Hány különböző értéke lehet az $a_{16} - a_7$ különbségnek?

Szabó Magda (Szabadka)

4. feladat I. megoldása: Legyen

$$
\begin{aligned}
S_1 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
S_2 &= a_2 + a_3 + a_4 \\
&\vdots \\
S_{14} &= a_{14} + a_{15} + a_{16}.
\end{aligned}
$$

Ebből a konstrukcióból következik, hogy $S_{14} - S_{13} = a_{16} - a_{13}$ és $S_{11} - S_{10} = a_{13} - a_{10}$, végül $S_8 - S_7 = a_{10} - a_7$.

Eszerint:

$$a_{16} - a_7 = S_{14} + S_{11} + S_8 - S_7 - S_{10} - S_{13}.$$

Mivel S_i az 5, 6, 7, 8 számok bármelyike lehet ($i = 1, 2, 3, \ldots, 14$), ezért az $a_{16} - a_7$ különbség értéke a -9-től a $+9$-ig bármelyik egész számot felveheti, azaz 19 különböző érték lehetséges.

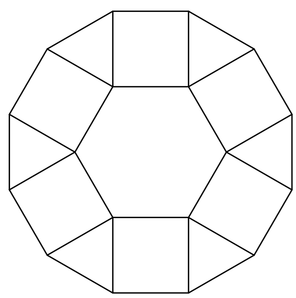
---

5. feladat: Melyek azok a szabályos sokszögek, amelyek hézag és átfedés nélkül összerakhatók más ugyanolyan oldalhosszúságú szabályos sokszögekből?

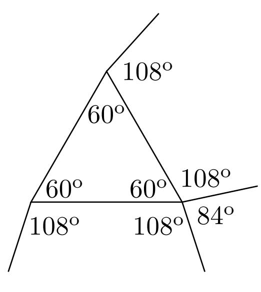
Bogdán Zoltán (Cegléd)

5. feladat I. megoldása: A szabályos sokszög egy szöge kisebb 180°-nál, de 60°-nál nem kisebb, ezért egy csúcsánál lévő szögét pontosan két lefedő sokszög egy-egy szögének összege tölti ki. Az egyik lefedő sokszög csak háromszög lehet, mert már két négyzetbeli szög összege $2 \cdot 90° = 180°$ lesz. Mivel a szabályos hatszög egy szöge 120°-os, a másik lefedő sokszög oldalszáma 6-nál kisebb, hiszen $120° + 60° = 180°$. Ezért három eset lehetséges:

a) A szabályos sokszög egy csúcsánál két szabályos háromszög találkozik. A sokszög egy szöge tehát 120°, és az így lehetséges szabályos hatszög 6, ugyanolyan oldalhosszúságú szabályos háromszög lefedi.



b) A csúcsnál lévő szögtartományra egy 60° és egy 90°-os szög illeszkedik. A sokszög egy szöge tehát $60° + 90° = 150°$. A szögösszegre vonatkozó képletből: $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = 150° \Longrightarrow n = 12$. Ez megvalósítható 6 szabályos háromszögből, 6 négyzetből és egy szabályos hatszögből összeillesztett szabályos 12-szöggel. A belső sokszög szabályos hatszög volta könnyen bizonyítható.



c) Egy csúcsnál lévő szögtartományt egy szabályos háromszög és egy szabályos ötszög egy-egy szöge fedi le. Így a létrehozandó sokszög belsejében lenne olyan pont, amelynél egy szögtartományt 84°-os szögű sokszögnek kellene lefedni, tehát most nincs megoldás, hiszen az $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} = 84^\circ$ egyenlet megoldása nem lehet egész szám.

---

6. feladat: Igazoljuk, ha p pozitív prímszám, akkor

$$\sqrt{p\cdot(p+1)}+\sqrt{(p+1)\cdot(p+3)}+\sqrt{p\cdot(p+5)}+\sqrt{(p+3)\cdot(p+5)}$$

irracionális szám!

Bencze Mihály (Brassó)

6. feladat I. megoldása: Legyen $x=\sqrt{p\cdot(p+1)}+\sqrt{(p+1)\cdot(p+3)}+\sqrt{p\cdot(p+5)}+\sqrt{(p+3)\cdot(p+5)}$!

Ha $p=2$, akkor $x=\sqrt{6}+\sqrt{15}+\sqrt{14}+\sqrt{35}$, vagy más alakban $x=(\sqrt{2}+\sqrt{5})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{7})$. Könnyen bizonyítható, hogy ekkor x irracionális szám.

Ha $p=3$, akkor $x=\sqrt{12}+\sqrt{24}+\sqrt{24}+\sqrt{48}$, illetve szorzat alakban $x=\sqrt{12}\cdot(3+2\cdot\sqrt{2})$. Erről a számról ugyancsak könnyen belátható, hogy irracionális.

Végül $p=5$ esetén $x=\sqrt{30}+\sqrt{48}+\sqrt{50}+\sqrt{80}$, vagy másként $x=(\sqrt{5}+\sqrt{8})\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{10})$, amely szintén irracionális.

Legyen ezután $p>5$ és tételezzük fel, hogy x racionális. Ekkor:

$$\frac{12}{x}=\frac{12}{(\sqrt{p+5}+\sqrt{p+1})\cdot(\sqrt{p+3}+\sqrt{p})}=(\sqrt{p+5}-\sqrt{p+1})\cdot(\sqrt{p+3}-\sqrt{p})$$

és így

$$\frac{12}{x}=\sqrt{(p+3)\cdot(p+5)}-\sqrt{(p+1)\cdot(p+3)}-\sqrt{p\cdot(p+5)}-\sqrt{p\cdot(p+1)}$$

is racionális szám.

Képezzük az $x+\frac{12}{x}$ számot!

$$x+\frac{12}{x}=2\cdot(\sqrt{(p+3)\cdot(p+5)}+\sqrt{p(p+1)}).$$

Ezért

$$\frac{1}{4}\cdot\left(x+\frac{12}{x}\right)^2=(p+3)\cdot(p+5)+p\cdot(p+1)+2\cdot\sqrt{p\cdot(p+1)\cdot(p+3)\cdot(p+5)}.$$

A kapott egyenlőség bal oldala nyilvánvalóan racionális szám, ha x az. A jobb oldal tényezői közül a $\sqrt{p\cdot(p+1)\cdot(p+3)\cdot(p+5)}$ kifejezés viszont irracionális, mert ellenkező esetben $p\cdot(p+1)\cdot(p+3)\cdot(p+5)$-nek négyzetszámnak kellene lennie, ez azonban csak úgy volna lehetséges, ha p osztója volna $p+1$-nek, $p+3$-nak vagy $p+5$-nek. De ez $p>5$ esetén nem valósulhat meg, mivel akkor p osztója volna 1-nek, 3-nak, vagy 5-nek. Ellentmondásra jutottunk, ezzel beláttuk, hogy az x kifejezés minden p pozitív prímszámra irracionális szám.

Megjegyzés: a $p=2$-höz és a $p=5$-höz tartozó esetek bizonyítása a $p>5$-nél követett gondolatmenettel is történhet, a $p=3$-nak megfelelő x szám esetén pedig (feltételezve, hogy x racionális) négyzetre emelés után láthatjuk be, hogy x^2 nem lehet racionális, és így jutunk ellentmondásra.