XII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Eger, 2003. ápr. 15-19.

9. osztály

1. feladat: Az idén, tehát 2003-ban felhívott telefonon egykori matematikatanárom, és egészségi állapotára panaszkodott. Kissé udvariatlanul megkérdeztem, hogy hány éves. Erre a következőt válaszolta:

Ha azt az évszámot, amelyben 43 éves voltam, megszorzom azzal az évszámmal, amelyben 45 éves voltam, majd elosztom születési évszámommal, akkor megkapom azt az évszámot, amelyben... Ekkor megszakadt a vonal, és sokáig nem is tudtam újrahívni. Szerencsére a fent közölt adatokból ki tudtam számolni, hogy melyik évben születetett. Vajon hány éves most egykori tanárom?

Katz Sándor (Bonyhád)

1. feladat I. megoldása: Ha x a születési évszám, akkor

$$\frac{(x+43)(x+45)}{x} = \frac{x^2+88x+1935}{x} = x+88+\frac{1935}{x}$$

egész, de ez csak $x = 1935$ esetén lehetséges, hiszen 1935 következő legnagyobb oszója, a 645 már nem lehet a születési évszám.

Tehát a tanárom most, 2003-ban 68 éves.

---

2. feladat: Oldjuk meg az $x + 2y = 4$ és $2xy - 3z^2 = 4$ egyenletekből álló egyenletrendszert, ha x, y és z valós számok.

Oláh György (Komárom)

2. feladat I. megoldása: Az egyenletrendszer első egyenletéből: $x = 4 - 2y$. Ezt a második egyenletbe helyettesítve fokozatosan a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} 2(4-2y)y - 3z^2 &= 4 \\ 4 + 4y^2 - 8y + 3z^2 &= 0 \\ 4(1-y)^2 + 3z^2 &= 0. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $y = 1$, $z = 0$, és ezen eredmények figyelembe vétele után $x = 2$. Tehát a feladat megoldása: $x = 2$, $y = 1$ és $z = 0$.

---

3. feladat: Az asztalon fekszik néhány kupac kavics. Egy "lépés" jelentse azt, hogy kiválasztunk egy legalább háromelemű kupacot, egy darab kavicsot elveszünk, a maradékot pedig két, nem feltétlenül egyforma, kisebb kupacra osztjuk. El lehet-e érni, hogy néhány lépés után minden kupacban 3 darab kavics legyen, ha kezdetben egyetlen, 2001 darab kavicsot tartalmazó kupac volt az asztalon?

Erdős Gábor (Nagykanizsa)

3. feladat I. megoldása: Tegyük fel, hogy a feladat elvégezhető.

Minden lépés 1-gyel csökkenti a kavicsok számát. Mivel induláskor is és a végén is a kavicsok száma 3-mal osztható, ezért a lépések száma is osztható 3-mal. Jelöljük a lépések számát $3n$-nel.

A kupacok száma minden lépésben 1-gyel nő. Mivel kezdetben 1 kupac volt, a végén a kupacok száma $3n + 1$. A végén a kavicsok száma kétféleképpen is összeszámolható:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (3n+1) &= 2001 - 3n \\ 9n + 3 &= 2001 - 3n \\ 12n &= 1998. \end{aligned}$$

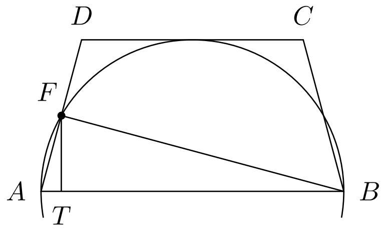
Ha n egész, akkor a bal oldal osztható 4-gyel, a jobb oldal viszont nem, vagyis ellentmondáshoz jutottunk, ezért a fenti eljárással nem valósítható meg a kavicsok elosztásának kitűzött célja.

---

4. feladat: Az $ABCD$ trapéz AB alapjára mint átmérőre írt kör érinti a CD alapot és felezi az AD és BC szárakat. Mekkorák a trapéz szögei?

Katz Sándor (Bonyhád)

4. feladat I. megoldása: Ha az AD szár felezőpontja F, akkor a Thalész-tétel szerint az $ABF\triangle$ derékszögű.



Az AB oldalhoz tartozó FT magasság fele a trapéz magasságának és ezzel a kör sugarának, ezért negyede az AB átfogónak. Ismert, hogy az ilyen háromszög hegyesszögei 15^o és 75^o.

Ugyanígy belátható, hogy a BC szár is 75^o-os szöget zár be az alappal, tehát a trapéz szögei: 75^o, 75^o, 105^o, 105^o.

---

5. feladat: Határozzuk meg az n egész szám értékeit, melyekre

$$\left\{\frac{n^2+n+1}{6}\right\} + \left\{\frac{n}{2}\right\} = \left[\frac{2n}{n+6}\right].$$

($[x]$ az x szám egészrésze, tehát az x-nél nem nagyobb egészek közül a legnagyobb, míg $\{x\} = x - [x]$, vagyis $\{x\}$ az x szám törtrésze.)

Kacsó Ferenc (Marosvásárhely)

5. feladat I. megoldása: Az n^2+n+1 páratlan szám, s így 6-tal való pozitív osztási maradéka 1, 3 vagy 5. Ezért $\left\{\frac{n^2+n+1}{6}\right\}$ értéke $1/6$, $1/2$ vagy $5/6$.

Másrészt $\left\{\frac{n}{2}\right\}$ értéke 0 vagy $1/2$.

Mivel a két törtrész összege egy egészrésszel egyenlő, a törtrészek összege egész szám kell, hogy legyen. Ez csak úgy lehetséges, ha $\left\{\frac{n^2+n+1}{6}\right\} = \frac{1}{2}$, és $\left\{\frac{n}{2}\right\} = \frac{1}{2}$. A második egyenlőségből következik, hogy $n = 2m+1$, $m \in \mathbf{Z}$, tehát

$$\frac{n^2+n+1}{6} = \frac{4m^2+6m+3}{6} = \frac{2m^2}{3} + m + \frac{1}{2}.$$

Ennek törtrésze csak úgy lehet $1/2$, ha m osztható 3-mal: $m = 3k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Tehát $n = 6k+1$ kell, hogy legyen és erre az értékre az egyenlőség bal oldala 1. Ez akkor teljesül, ha $n \geq 6$, vagyis $6k+1 \geq 6$, innen $k \geq 1$.

Tehát a keresett egész számok: $n = 6k+1$, ahol $k \in \mathbf{Z}$, $k \geq 1$.

---

6. feladat: Egy bogár a 12 m oldalhosszúságú $ABCD$ négyzet AB oldalának B-hez közelebb eső harmadolópontjából kiindulva az AB oldal A-hoz legközelebb eső hatodolópontjába mászik úgy, hogy közben egy-egy pontban érinti a BC, CD, és DA oldalakat ebben a sorrendben. Legalább mekkora utat tesz meg a bogár?

Némethy Katalin (Budapest)

6. feladat I. megoldása: Nyilvánvaló, hogy a bogár úthosszának a minimumát keressük.

A $PRST$ töröttvonalat két lépésben helyettesítjük egy másik töröttvonallal. Az első lépésben P-t tükrözzük B-re és Q-t tükrözzük A-ra.

A tükrözés miatt $PR + RS + ST + TQ = P'R + RS + ST + TQ'$ A második lépésben a $P'RS$ töröttvonalat tükrözzük a CD egyenesére.

Mivel $P'R + RS + ST + TQ' = P''R' + R'S + ST + TQ'$, ezért $PR + RS + ST + TQ = P''R' + R'S + ST + TQ'$. A bogár úthossza tehát a $P''R' + R'S + ST + TQ'$ hosszúsággal egyenlő.

A $P''R'STQ'$ töröttvonal hossza viszont akkor a legrövidebb, ha a P'', R', S, T és Q' pontok egy egyenesre illeszkednek. Ekkor a Q', P' és P'' pontok egy derékszögű háromszög csúcsai, amelyre a megadott adatok alapján $P'Q' = 18m$, $P'P'' = 24m$, és így a Pitagorasz-tétetelt alkalmazva $P''Q' = 30m$. A bogár tehát legalalább 30 métert tesz meg.