XI. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Sepsiszentgyörgy, 2002. márc. 16-20.

12. osztály

1. feladat: Tudjuk, hogy 1000 darab természetes szám reciprokának összege nagyobb mint 10. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük legalább két egyenlő szám.

Szabó Magda (Szabadka)

1. feladat I. megoldása: Bizonyítsunk indirekten! Tegyük fel, hogy $x_1, x_2, \ldots, x_{1000}$ páronként különböző számok, ekkor feltehetjük azt is, hogy $x_1 < x_2 < \ldots < x_{1000}$. Ebből már következik, hogy $x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, \ldots, x_{1000} \geq 1000$, ebből pedig

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{1000}} \leq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{1024} =$$

$$1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^9} + \ldots + \frac{1}{2^{10} - 1}\right) <$$

$$1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^9} + \ldots \frac{1}{2^9}\right) = 10$$

Ez ellentmond a feladat feltételének, ami azt jelenti, hogy a számok nem lehetnek páronként különbözők.

---

2. feladat: Az XOY derékszögű koordináta rendszerben adottak az $A\,(0, 51)$ és $B\,(78, 51)$ pontok. Létezik-e az OX tengelyen olyan M pont, melyre az MAB háromszög belsejében elhelyezkedő rácspontok száma pontosan 2002? (A rácspontok azon pontok melyek koordinátái egész számok.)

Kacsó Ferenc (Marosvásárhely)

2. feladat I. megoldása: Bármely M pontra egészítsük ki az MAB háromszöget egy $MABD$ paralelogrammává, amelyben a D pont is az x tengelyen helyezkedik el! Az ebben elhelyezkedő rácspontok 50 sort alkotnak, és minden sorban legfeljebb 78 rácspont van, hiszen a sorban behúzott egyenes csak 79 egység hosszan halad a paralelogrammán belül. Ez azt jelenti, hogy a paralelogramma belsejébe legfeljebb 3900 pont esik, és a két háromszögbe eső rácspontok száma legfeljebb 50-ben különbözhet (az MB átló legfeljebb 1 ponttal juttat többet az egyik háromszögbe, mint a másikba). Így az MAB háromszögbe legfeljebb 1975 rácspont eshet, ami kisebb a 2002-nél.

---

3. feladat: Igazoljuk, hogy a $b_1, b_2, \ldots, b_m$ pozitív valós számok akkor és csakis akkor alkotnak mértani haladványt (mértani sorozatot), ha

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^2 b_{n-k+1}^2 = n b_1^2 b_n^2, \quad n \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Bencze Mihály (Brassó)

3. feladat I. megoldása: Tudjuk, hogy ha a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ számok mértani sorozatot alkotnak, akkor bármely k-ra

$$b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n,$$

amiből az következik, hogy $\sum_{k=1}^{n} b_k^2 b_{n-k+1}^2 = n b_1^2 b_n^2$.

A másik irány bizonyításában $n = 3$-ra azt kapjuk, hogy $b_2^2 = b_1 b_3$, amiből következik, hogy b_1, b_2, b_3 mértani sorozatot alkot. Most tegyük fel, hogy $b_1, b_2, \ldots, b_n$ mértani sorozat, és lássuk be, hogy a következő tag éppen b_{n+1} lesz. Írjuk fel az összefüggést $n+1$-re, és helyettesítsük be az első n elemre kapott képleteket ($b_2 = b_1 \cdot q$, $b_3 = b_1 \cdot q^2$, stb.)!

$$\begin{aligned} b_2^2 b_n^2 + b_3^2 b_{n-1}^2 + \ldots + b_n^2 b_2^2 + b_{n+1}^2 b_1^2 &= (n+1) b_1^2 b_{n+1}^2 \\ b_1^2 q^2 b_1^2 q^{2n-2} + b_1^2 q^4 b_1^2 q^{2n-4} + \ldots + b_1^2 q^{2n-2} b_1^2 q^2 &= (n-1) b_1^2 b_{n+1}^2, \end{aligned}$$

ebből pedig a bal oldalon összevonva és egyszerűsítve $b_{n+1} = b_1 q^n$ adódik, épp amit be akartunk látni.

---

4. feladat: Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán a következő egyenletet

$$\left[\frac{x_1^2}{x_2+x_3}\right] + \left[\frac{x_2^2}{x_3+x_4}\right] + \cdots + \left[\frac{x_n^2}{x_1+x_2}\right] = \left[\frac{n-1}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\right],$$

ahol $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$ és $[x]$ az x szám egész részét jelöli.

Bencze Mihály (Brassó)

4. feladat I. megoldása: Minden x_i pozitív egész, ami azt jelenti, hogy mindegyik legalább 1, ebből következően az összegük legalább n. Ez azt jelenti, hogy $\left[\frac{n-1}{x_1+x_2+\ldots+x_n}\right] = 0$. Ebből az következik, hogy

$$\left[\frac{x_1^2}{x_2+x_3}\right] = \left[\frac{x_2^2}{x_3+x_4}\right] = \ldots = \left[\frac{x_n^2}{x_1+x_2}\right] = 0$$

Ez pedig az egészrész definícióját felhasználva azt jelenti, hogy a számlálók kisebbek a megfelelő nevezőknél, és mivel egész számokról van szó, azért

$$\begin{cases} x_1^2 & \leq & x_2+x_3-1 \\ x_2^2 & \leq & x_3+x_4-1 \\ & \vdots & \\ x_n^2 & \leq & x_1+x_2-1 \end{cases}$$

A megfelelő oldalakat összeadva azt kapjuk, hogy $\sum_{k=1}^{n}(x_k-1)^2 \leq 0$. Ez pedig csak akkor teljesülhet, ha minden ismeretlen 1-gyel egyenlő.

---

5. feladat: Legyenek az $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$ tetszőleges egész számok. Az $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ számok a $\{-1, 0, 1\}$ halmazbeli értékeket vehetik fel, de úgy, hogy nem mind egyenlők 0-val. Igaz-e, hogy van olyan értéke az

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{11}x_{11}$$

kifejezésnek, amely 2002-vel osztható?

Róka Sándor (Nyíregyháza)

5. feladat I. megoldása: Tekintsük az összes olyan összeget, amely

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_{11}x_{11}$$

alakú, ahol minden b_i 0 vagy 1 lehet. Ez összesen $2^{11} = 2048$ különböző összeg. A skatulyaelv szerint ezek között van kettő, amelyek 2002-vel vett osztási maradéka megegyezik. Legyenek ezek $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_{11}x_{11}$ és $d_1x_1 + d_2x_2 + \ldots + d_{11}x_{11}$. A két kifejezés különbsége formálisan $(c_1-d_1)x_1 + (c_2-d_2)x_2 + \ldots + (c_{11}-d_{11})x_{11}$. Ez az előbbiek miatt osztható lesz 2002-vel, és mivel minden $c_i - d_i$ érték az a_i-k értékkészletébe tartozik, azért lesznek megfelelő a_i-k, melyekre az összeg 2002-vel osztható lesz.

---

6. feladat: Egy táblára felírtuk az egész számokat -6-tól 6-ig (13 számot). Egy lépésben két kiválasztott szám, a és b helyett felírhatjuk az

$$A = \frac{5a-12b}{13} \text{ és } B = \frac{12a+5b}{13}$$

számokat. Elérhetjük-e azt, hogy bizonyos számú lépés után 13 egyforma szám álljon a táblán?

dr. Katz Sándor (Bonyhád)

6. feladat I. megoldása: Ha megvizsgáljuk a lehetséges lépés után keletkező számokat, azt találjuk, hogy négyzetösszegük megegyezik az eredeti számokéval. A számok négyzetösszege így mindvégig változatlan, és mivel eredetileg 182 volt, azért ha léteznének ilyen átalakítások, akkor minden szám $\sqrt{\frac{182}{13}} = \sqrt{14}$ lenne, de mivel minden átalakítás után racionális számokat kapunk, azért ez lehetetlen.