XI. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Sepsiszentgyörgy, 2002. márc. 16-20.

11. osztály

1. feladat: Az

$$\frac{1}{2002}, \frac{2}{2001}, \frac{3}{2000}, \ldots, \frac{2000}{3}, \frac{2001}{2}, \frac{2002}{1}$$

számok közül kiválasztható-e három úgy, hogy a kiválasztott három szám szorzata 1 legyen?

dr. Katz Sándor (Bonyhád)

1. feladat I. megoldása: Nem lehet megfelelő számokat kiválasztani. Ezt bizonyítsuk be indirekten! Tegyük fel, hogy léteznek ilyen számok, $\frac{a}{2003-a}$, $\frac{b}{2003-b}$, $\frac{c}{2003-c}$, ahol a, b, c 1 és 2002 közé esnek. Ez azt jelenti, hogy

$$\frac{a}{2003-a} \cdot \frac{b}{2003-b} \cdot \frac{c}{2003-c} = 1$$

Ha átszorzunk, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
abc &= (2003-a)(2003-b)(2003-c) \\
abc &= 2003^3 - 2003^2(a+b+c) + 2003(ab+bc+ac) - abc \\
2abc &= 2003[2003^2 - 2003(a+b+c) + 2003(ab+bc+ac)]
\end{aligned}$$

Mivel pedig a 2003 prímszám, ezért osztója kéne hogy legyen a, b, c valamelyikének, de ez lehetetlen, hiszen mindhárom szám 2003-nál kisebb.

---

2. feladat: Adott az $a > 1$ valós szám és az $f : (1, \infty) \longrightarrow \mathbb{N}$ függvény, úgy, hogy

$$a^{f(x)} \leq x < a^{f(x)+1}, \quad \forall x > 1.$$

Igazoljuk, hogy

$$f(xyz) \geq f(x) + f(y) + f(z), \quad \forall x, y, z > 1.$$

Bencze Mihály (Brassó)

2. feladat I. megoldása: Adott a mellett bármely x valós számra létezik egy olyan k kitevő, melyre $a^k \leq a^{k+1}$. A feladat feltételei mellett

$$a^{f(x)} \leq x < a_{k+1} \text{és} a^k \leq x < a^{f(x)+1},$$

ebből pedig azt kapjuk, hogy $k - 1 < f(x) < k + 1$, de mivel f a természetes számokra képez, azért szükségszerűen $f(x) = k$. Vegyünk most két ismeretlent, x-et és y-t, melyekre $f(x) = k$ és $f(y) = l$. A definícióba visszaírva ezeket az értékeket $a^{k+l} \leq xy < a^{k+l+2}$ adódik, amiből $f(xy) \geq k+l = f(x)+f(y)$. Alkalmazva ugyanezt az eljárást xy-ra és z-re végeredményben azt kapjuk, hogy

$$f(xyz) \geq f(xy) + f(z) \geq f(x) + f(y) + f(z),$$

amit bizonyítani akartunk.

---

3. feladat: Bizonyítsuk be, hogy minden tetraédernek van olyan csúcsa, amelyből induló három éléből háromszög szerkeszthető.

Kántor Sándor (Debrecen)

3. feladat I. megoldása: Legyen a tetraéder leghosszabb éle AB. Belátjuk, hogy ekkor az A-ból vagy a B-ből induló élekből háromszög szerkeszthető.

Alkalmazzuk az indirekt módszert! Legyenek az A-ból kiinduló élek $AB = a, b, c$, a B-ből kiindulók a, d, e. Ha feltesszük, hogy egyik csúcsból induló élekből sem szerkeszthető háromszög, akkor mivel a volt a tetraéder leghosszabb éle, azért $a \geq e + d$ és $a \geq b + c$. A tetraédernek azonban a, e, c és a, d, b egy-egy lapot közrefogó élei, vagyis ezek az élek háromszöget alkotnak. Ez azt jelenti, hogy $a < e + c$ és $a < b + d$. Ebből egyrészt $2a < e + b + c + d$ következik, másrészt az előző két egyenlőtlenségünkből $2a \geq b + c + d + e$ következik, ami ellentmondás, ezzel pedig az állítást beláttuk.

---

4. feladat: Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ szürjektív (amely minden természetes számot felvesz) függvényt, amelyre

$$f\left(10^{f(n)} + m\right) = f\left(10^n\right) + f(m), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Bíró Béla (Sepsiszentgyörgy)

4. feladat I. megoldása: Az identikus függvény könnyen látható módon megfelelő lesz. Megmutatjuk, hogy ez lesz az egyetlen jó függvény. A szürjektivitás miatt bármely megfelelő függvényre van egy olyan n_0, amelyre $f(n_0) = 0$. Helyettesítsünk most $n = n_0$-t a feltételi egyenletben

$$f(m + 1) = f(10^{n_0}) + f(m)$$

Ha $n_0 \geq 1$ lenne, akkor $m = n_0 - 1$ helyettesítésével

$$0 = f(10^{n_0}) + f(n_0 - 1),$$

ebből pedig $f(10^{n_0}) = 0$, amiből már $f(n) = 0$-t kapjuk minden n-re, ez viszont ellentmondás, mivel feltettük, hogy f szürjektív.

Ez azt jelenti, hogy $n_0 = 0$, vagyis $n = 0$-t helyettesítve

$$f(m + 1) = f(m) + f(1)$$

Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy bármely k-ra $f(k) = kf(1)$. Ez azt jelenti, hogy a szürjektivitás miatt $f(1) = 0$ nem lehetséges. Ekkor viszont a feltételi egyenletünk a

$$\left(10^{f(n)+m}\right) f(1) = 10^n f(1) + mf(1)$$

formát ölti, és mivel $f(1) \neq 0$, azért egyszerűsíthetünk vele, és így

$$10^{f(n)} + m = 10^n + m.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy az exponenciális függvény injektivitása miatt $f(n) = n$ minden n-re, és éppen ezt akartuk belátni.

---

5. feladat: a) Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$2^{nx} + (n - 1) \cdot 2 = \frac{2}{x}$$

egyenletet, ha $n \in \mathbb{N}^*$ rögzített természetes szám.

b) Határozzuk meg annak az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozatnak az általános tagját, amelynek a tagjai teljesítik

$$2^{x_1} + 2^{2x_2} + 2^{3x_3} + \ldots + 2^{nx_n} = \frac{2}{x_n}$$

egyenlőséget bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

Longáver Lajos (Nagybánya)

5. feladat I. megoldása: a.) Mivel a bal oldalon mindenképpen egy pozitív szám áll, ez igaz lesz a jobb oldalra is, tehát $x > 0$ teljesül. Vegyük észre továbbá, hogy a pozitív számokon a $2^{nx} + (n-1) \cdot 2$ függvény szigorúan növekvő, a $\frac{2}{x}$ függvény pedig szigorúan csökkenő. Ez azt jelenti, hogy az egyenletnek legfeljebb egy megoldása van. A kifejezések alakjából azonban láthatjuk, hogy $\frac{1}{n}$ megoldás, tehát másik nincs is.

b.) Teljes indukcióval belátjuk, hogy bármely n-re $x_n = \frac{1}{n}$. $n = 1$-re $x_1 = 1$ a $2^{x_1} = \frac{2}{x_1}$ egyenlet megoldása. Tegyük fel most, hogy bármely n-nél kisebb k-ra $x_k = \frac{1}{k}$ (ez nem szükséges feltétele a megoldás létezésének, de mi egyetlen sorozatot keresünk, és annak a tagjaira ez föltehető), ekkor az egyenlet

$$2^n + (n-1) \cdot 2 = \frac{2}{x_n},$$

ennek pedig csak egyetlen megoldása van, $x_n = \frac{1}{n}$. Ezzel az állítást beláttuk.

---

6. feladat: Egy lépés során az (a, b) természetes számpárt az $(a + 2b, b + 2a)$ számpárral helyettesítjük.

a) Határozzuk meg azokat a természetes számpárokat, amelyekből bizonyos számú lépés után a $(2002, 2003)$ számpárt kapjuk.

b) Adott a $p > 3$ prímszám. Bizonyítsuk be, hogy létezik egy olyan kezdeti (a, b) számpár, amelyre vagy az a vagy a b szám osztható p-vel és legalább $\dfrac{p+1}{2}$ lépés elvégzése után egy olyan számpárt kapunk, amelyben a két szám összege $2 \cdot 3^p$.

Bege Antal (Kolozsvár)

6. feladat I. megoldása: A számok összegét vizsgálva azt látjuk, hogy egy-egy lépés után az háromszorosára nő. A végeredményben a számok összege $4005 = 3^2 \cdot 445$, vagyis legfeljebb két lépést tehetünk, mivel pedig a lépések visszafelé is elvégezhetők $\left(a = \frac{2}{3}\left(b + 2a - \frac{1}{2}(a+2b)\right), b = \frac{2}{3}\left(2b + a - \frac{1}{2}(2a+b)\right)\right)$, azért csak két megoldás lehet, $(668, 667)$ és $(222, 223)$, ezekből egy, illetve két lépésben kapjuk meg a kívánt számpárt.

b.) A két szám összege az imént látott módon egy lépésben háromszorosára nő, míg különbségük nyilván nem változik. Az utolsó lépés után az összeg $2 \cdot 3^p$ lesz, próbálkozzunk először olyan számokkal, melyek különbsége 2. Tekintsük az $a_0 = 3^k + 1$ és $b_0 = 3^k - 1$ számokat, ezekből n lépés elvégzése után az

$$(a_n, b_n) = \left(3^{k+n} + (-1)^n, 3^{k+n} - (-1)^n\right)$$

számpárt kapjuk, a kis Fermat-tétel szerint pedig a

$$3^{p-1} - 1 = \left(3^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(3^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)$$

szám osztható lesz p-vel, ennek alapján ha k-t $\frac{p-1}{2}$-re választjuk, akkor mivel p prím, azért osztani fogja a szorzat valamelyik tényezőjét, tehát a_0-t vagy b_0-t, és ha $\frac{p+1}{2}$ lépést végzünk, akkor ezek után a fent kapott formula szerint az összeg nem lesz más, mint $2 \cdot 3^p$, tehát ezek a számok valóban megfelelők lesznek.