XI. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Sepsiszentgyörgy, 2002. márc. 16-20.

10. osztály

1. feladat: Egy körön adott 2002 pont, amelyek közül egyet megjelölünk A-val. Az adott pontokkal, mint csúcspontokkal megszerkesztjük az összes konvex sokszöget (háromszögeket, négyszögeket, ...).

a) Melyik sokszögből van több, azokból, amelyeknek az egyik csúcspontja az A, vagy azokból, amelyeknek egyik csúcspontja sem esik egybe az A ponttal?

b) Legyen P annak a valószínusége, hogy az összes konvex sokszög közül találomra kiválasztva egyet, annak az egyik csúcspontja az A. Bizonyítsuk be, hogy

$$\left|P - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2^{1981}}.$$

Szabó Magda (Szabadka)

1. feladat I. megoldása: a.) Tekintsük a legkisebb olyan ívet, amely tartalmazza az A-t és mindkét végpontját kiválasztottuk! Ha ehhez a két végponthoz hozzávesszük még az A csúcsot, és a sokszöget kiegészítjük a kapott háromszöggel, az eredmény nyilván egy konvex sokszög lesz, amely megfelel a feltételeknek. Az is látható, hogy különböző sokszögekből különbözőket kapunk, mivel ez az átalakítás egyértelműen megfordítható: venni kell az A csúccsal szomszédos két kiválasztott csúcsot, és a meghatározott háromszöget levágni a sokszögből. Ez azt jelenti, hogy az A csúcsot nem tartalmazó sokszögekből legfeljebb annyi van, mint az A csúcsot tartalmazókból. Ha viszont veszünk egy A csúcsú háromszöget, annak a fent leírt módon nem tudunk megfeleltetni egyetlen olyan sokszöget sem, amely nem tartalmazza csúcsként az A-t, vagyis az A-t tartalmazó sokszögekből szigorúan több lesz.

b.) Ha kiválasztjuk a csúcsokat, az összekötés sorrendje már egyértelmű, azaz az össze lehetséges sokszögek száma

$$N = \binom{2002}{3} + \binom{2002}{4} + \ldots + \binom{2002}{2002} = 2^{2002} - \binom{2002}{0} - \binom{2002}{1} - \binom{2002}{2}$$

Vegyük most számba azokat a sokszögeket, amelyek egyik csúcsa az A pont!

$$N_A = \binom{2001}{2} + \binom{2001}{3} + \ldots + \binom{2001}{2001} = 2^{2001} - \binom{2001}{0} - \binom{2001}{1}$$

A keresett valószínűség így

$$p = \frac{N_A}{N} = \frac{2^{2001} - \binom{2001}{0} - \binom{2001}{1}}{2^{2002} - \binom{2002}{0} - \binom{2002}{1} - \binom{2002}{2}}$$

Ebből

$$p - \frac{1}{2} = \left(2\binom{2002}{2} + 1\right) - \left(\binom{2002}{0} + \binom{2002}{1} + \binom{2002}{2}\right) =$$

$$= \frac{2\binom{2002}{2} + 1}{2^{2003}} < \frac{2048^2}{2^{2003}} = \frac{1}{2^{1981}},$$

és éppen ezt kellett belátnunk.

---

2. feladat: Határozzuk meg az a paraméter azon értékeit, amelyekre

$$\sqrt{1 + x^4} > 1 - 2ax + x^2$$

egyenlőtlenség minden pozitív x-re teljesül.

Bogdán Zoltán (Cegléd)

2. feladat I. megoldása: Az egyenlőtlenség

$$a > \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}\right)$$

alakba írható át. Ha most bevezetjük az $y = x + \frac{1}{x}$ jelölést, akkor $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ miatt az egyenlőtlenségünk

$$a > \frac{1}{2}\left(y - \sqrt{y^2 - 2}\right)$$

formájú, azaz gyöktelenítés után

$$a > \frac{1}{(y + \sqrt{y^2 - 2})}$$

Mivel x pozitív, azért $y \geq 2$, tehát $a > \frac{2}{2+\sqrt{2}}$ esetén az egyenlőtlenség biztosan teljesülni fog, ennél kisebb alsó korlátot viszont nem tudunk mondani, tehát ezek lesznek az a paraméter megfelelő értékei.

---

3. feladat: Bizonyítsuk be, hogy minden ABC háromszögben érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$4T(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C) \geq ab + bc + ac,$$

ahol a, b, c a háromszög oldalainak hosszát, A, B, C a háromszög szögeinek nagyságát és T a háromszög területét jelenti.

Oláh György (Komárom)

3. feladat I. megoldása: Lássuk be első lépésként, hogy

$$4T(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C) = a^2 + b^2 + c^2$$

A koszinusztételből tudjuk, hogy $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, amiből azt kapjuk, hogy $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\sin\alpha} = \frac{b^2+c^2-a^2}{4T}$, átszorozva tehát

$$4T\operatorname{ctg}\alpha = b^2 + c^2 - a^2$$

Hasonlóan megy a bizonyítás a másik két szögre, a három megfelelő összefüggést összeadva pedig éppen a bizonyítandó állítás adódik.

Ezután már csak azt kell belátnunk, hogy $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$. Ez azonban 2-vel szorozva és átrendezve azt adja, hogy $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 \geq 0$, ami nyilvánvalóan igaz. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

---

4. feladat: Adott az $n \geq 2$ páratlan természetes szám. Határozzuk meg az

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2-1}}$$

szám egész részét.

Balázsi Borbála (Beregszász)

4. feladat I. megoldása: Vezessük be a következő jelöléseket:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2-1}}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2}}$$

Tudjuk, hogy $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$ bármely n-re, ez pedig azt jelenti $A > B$. Adjuk most össze a két kifejezést, illetve vonjuk ki őket egymásból:

$$A+B=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2}},$$

ami gyöktelenítés után egyenlő

$$-\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}\pm\ldots-\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2}=n-1$$

Továbbá

$$\begin{aligned}A-B=&\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}-\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}\right)-\ldots-\\&-\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-3}+\sqrt{n^2-2}}-\frac{1}{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2-1}}\right)-\frac{1}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2}}<\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}<1\end{aligned}$$

Tekintve, hogy $A=\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}$, azért $\frac{A+B}{2}<A<\frac{A+B}{2}+\frac{1}{2}$, vagyis $\frac{n-1}{2}<A<\frac{n+1}{2}$. Tudjuk továbbá, hogy n páratlan, ami azt jelenti, hogy $[A]=\frac{n-1}{2}$.

---

5. feladat: Az ABC háromszögben az AM, BN és CP összefutó egyenesek (egy ponton átmenő) (M a BC, N a CA és P az AB oldalon található). Legyen az AM és NP metszéspontja Q. Bizonyítsuk be, hogy, ha a $BQM\sphericalangle$ és $MQC\sphericalangle$ szögek egyenlők, akkor AM merőleges NP-re.

András Szilárd (Kolozsvár)

5. feladat I. megoldása: Húzzunk párhuzamost az A ponton át a PN egyenessel, jelöljük ezt az egyenest d-vel! Hosszabbítsuk meg a BQ és CQ szakaszokat a d egyenesig, legyenek a kialakult metszéspontok S és R. A párhuzamos szelők tétele szerint $\frac{AS}{PQ}=\frac{AB}{BP}$, továbbá $\frac{AR}{QN}=\frac{AC}{CN}$, amiből azt kapjuk, hogy

$$\frac{AR}{AS}=\frac{AC}{CN}\cdot\frac{BP}{AB}\cdot\frac{QN}{QP}$$

Az APN háromszögben alkalmazva továbbá a Ceva-tételt az AO, BO, CO egyenesekre azt kapjuk, hogy

$$\frac{AC}{CN}\cdot\frac{BP}{AB}\cdot\frac{QN}{QP}=1,$$

amiből azt kapjuk, hogy $AR=AS$. Ez azt jelenti, hogy a QA egyenes az RQS háromszögben nemcsak szögfelező, hanem súlyvonal is, ami viszont azt jelenti, hogy a háromszög egyenlőszárú, tehát QA egyben magasság, vagyis merőleges RS-re, azaz $NP\parallel SR$ miatt $AQ\perp PN$ is teljesülni fog.

---

6. feladat: Egy négyzet alakú 100-szor 100-as táblázat minden mezőjébe egy pozitív egész számot írunk. Tudjuk, hogy bármely két szomszédos (közös oldallal rendelkező) mezőbe írt szám különbsége legfeljebb 10. Bizonyítsuk be, hogy van 6 olyan mező a táblázatban, amelyekbe azonos számokat írtunk.

Urbán János (Budapest)

6. feladat I. megoldása: Véges sok számot írtunk be, ezek között mindig van legkisebb, jelöljük ezt m-mel! Legfeljebb 198 lépésben erről a mezőről bármelyikre eljuthatunk, vagyis minden szám legfeljebb

$$m+198\cdot 10=m+1980$$

lesz, ami azt jelenti, hogy maximum 1981 különböző számot írhattunk be a táblázatba. Annak azonban 10000 eleme van, és ha minden szám legfeljebb ötször szerepelne, akkor összesen $5\cdot 1981=9905$ mezőt tudnánk kitölteni, ami ennél kevesebb. A skatulyaelv szerint tehát lennie kell legalább egy számnak, amely minimum 6-szor fordul elő.