XI. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Sepsiszentgyörgy, 2002. márc. 16-20.

9. osztály

1. feladat: Határozzuk meg a

$$2001^{2002}$$

szám tízes számrendszerbeli alakjának utolsó hat számjegyét.

Kacsó Ferenc (Marosvásárhely)

1. feladat I. megoldása: Ismert képlet, hogy $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$. Eszerint

$$2001^n - 1 = 2000 \cdot a_n,$$

ahol a_n pozitív egész szám. Alakítsuk most át a kifejezésünket:

$$\begin{aligned} 2001^{2000} - 1 &= (2001 - 1)(2001^{1999} + 2001^{1998} + \ldots + 1) = \\ &= 2000(2000a_{1999} + 2000a_{1998} + \ldots + 2000a_1 + 2000) = 10^6 \cdot k, \end{aligned}$$

a zárójelen belül minden tagból egyet kivonva és az utolsóhoz 1999-et hozzáadva. Mivel pedig

$$2001^{2002} = 2001^2[(2001^{2000} - 1) + 1] = 4004001 \cdot 10^6 \cdot k,$$

azért az utolsó 6 jegye a 4004001 utolsó hat jegye lesz, vagyis 004001.

---

2. feladat: Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög AC és BC befogóján úgy vesszük fel a D és E pontokat, hogy DE párhuzamos AB-vel és

$$DE + EA = AB.$$

Határozzuk meg az EAB szög nagyságát.

dr. Katz Sándor (Bonyhád)

2. feladat I. megoldása: A feladat szerint $DE + EA = AB$, vagyis $AE = AB - DE$. Jelöljük a D és E pontok átfogóra vetített képét P-vel és Q-val. Tudjuk, hogy az ABC szög $45°$-os, eszerint $EQ = QB$. De tudjuk azt is, hogy $AP = BQ$, hiszen az APD és BQE háromszögek egybevágók. Ennek okán $BQ = \frac{AB-DE}{2} = \frac{AE}{2}$. Ez pedig azt jelenti, hogy mivel $EQ = QB$, azért $EQ = \frac{AE}{2}$ is teljesülni fog. Így tehát az AQE háromszögben a QE befogó egyenlő az átfogó felével, ami azt jelenti, hogy az EAQ szög $30°$-os, ezzel a feladatot megoldottuk.

---

3. feladat: Az ábrán látható táblázatban az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ számjegyeket úgy írtuk be, hogy mindegyiket pontosan egyszer használtuk fel, továbbá az $\overline{abc}$, $\overline{adg}$, $\overline{beh}$, $\overline{cfi}$, $\overline{def}$, $\overline{ghi}$, $\overline{aei}$ számok mindegyike osztható 11-gyel. Mekkora a $\overline{ceg}$ szám lehetséges legnagyobb értéke?

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Kiss Sándor (Nyíregyháza)

3. feladat I. megoldása: A táblázatba beírt számok összeg 45. Tekintsük az

$$(a - b + c) + (d - e + f) + (g - h + i) + 2(b - e + h)$$

összeget. A feladat szerint ennek minden tagja osztható 11-gyel, vagyis ez elmondható az összegről is. Vegyök azonban e helyett az

$$(a+b+c+d+e+f+g+h+i)-4e$$

kifejezést, amely az eredetivel megegyezik, tehát szintén 11-gyel osztható lesz. A zárójelben 45 áll, tehát e csakis 3 lehet, mivel csak ekkor lesz az összeg 11 többszöröse. Az $\overline{aei}$, $\overline{def}$, $\overline{beh}$ számok mind 11-gyel oszthatók és második számjegyük 3. Ilyen számból azonban csak 6 van: 132 és 231, 935 és 539, valamint 836 és 638. Ez viszont azt jelenti, hogy az a, b, d, f, h, i számok valamilyen sorrendben megegyeznek az $1, 2, 5, 6, 8, 9$ számokkal, vagyis c és g csak 4 és 7 lehet. Ebben az esetben a legnagyobb lehetséges érték 734, ami viszont elő is áll, ha

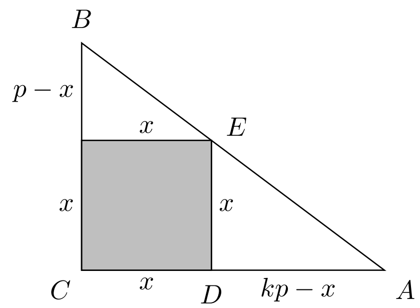
$$a=1, b=8, c=7, d=5, e=3, f=9, g=4, h=6, i=2.$$

---

4. feladat: Az ABC, C-ben derékszögű háromszögben $BC=p$, ahol p prímszám, az AC befogó hosszának számértéke a $k \cdot p$ $(k \in \mathbb{N}, k \geq 2)$, továbbá egész szám annak a négyzetnek az oldalhossza is, amelynek egyik csúcsa a C pont, a többi csúcsa az ABC háromszög oldalain van. Bizonyítsuk be, hogy a négyzet területe k^2-tel egyenlő!

Bíró Bálint (Eger)

4. feladat I. megoldása: Jelöljük a négyzet oldalhosszát x-szel, ekkor $FB=p-x$ és $AD=kp-x$.



A BFE és EDA háromszögek a szögek egyenlősége miatt hasonlók, ami azt jelenti, hogy $\frac{p-x}{x}=\frac{x}{kp-x}$, ebből pedig átszorzás és rendezés után az következik, hogy $x(k+1)=kp$. Tudjuk azonban, hogy a k és a $k+1$ relatív prímek, azért $k+1$ szükségképpen osztója a jobb oldalon a p számnak is. Ez pedig csak azt hagyja lehetőségként, hogy $k+1=p$, továbbá $x=k$, és így a négyzet területe $x^2=k^2$.

---

5. feladat: Az ABC egyenlő szárú háromszög $(AB=AC)$ síkjában adottak az M és N pontok úgy, hogy a BN és CM szakaszok a háromszög belsejében metszik egymást, $NBC\sphericalangle = MCA\sphericalangle$ és az MBN valamint NCM szögek derékszögek. Igazoljuk, hogy az M, N és A pontok egy egyenesen vannak!

András Szilárd, Lukács Andor (Kolozsvár)

5. feladat I. megoldása: Legyen az MN szakasz felezőpontja P. A BMN és CMN derékszögű háromszögekben P az átfogó felezőpontja, tehát a Thalész-tétel következményeként $PB=PC=MP$, vagyis P rajta lesz a BC szakasz oldalfelező merőlegesén. Tudjuk, hogy az MBN és NCM szögek megegyeznek (ti. derékszögek), ez azt jelenti, hogy a B és C pontok is rajta lesznek az MN fölé emelt Thalész-körön, tehát $MBCN$ húrnégyszög lesz. Ebből pedig $NBC\angle = NMC\angle$ következik. Az MPC háromszögről már beláttuk, hogy egyenlőszárú, vagyis $MCP\angle = PMC\angle$, és az első feltétel alapján tudjuk, hogy $MCA\angle = MCP\angle$. Mivel pedig P a CM szakasz B-vel ellentétes oldalán fekszik, azért P rajta van az AC egyenesen, és mivel tudjuk, hogy rajta van BC felezőmerőlegesén is, azért a P és A pontok meg fognak egyezni, és így M, N és A valóban egy egyenesre esnek.

6. feladat: Mutassuk ki, hogy bárhogyan is választunk 17 darab természetes számot az $\{1, 2, \ldots, 2002\}$ halmazból, létezik ezek között három különböző szám, amelyekkel mint oldalhosszakkal egy háromszög szerkeszthető. Igaz marad-e az állítás 16 szám esetén?

Jakab Tibor (Sepsiszentgyörgy)

6. feladat I. megoldása: Legyen a 17 kiválasztott számunk $1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{17} \leq 2002$. Belátjuk, hogy van olyan $1 \leq i \leq 15$ melyre az x_i, x_{i+1}, x_{i+2} hosszúságú szakaszokból háromszög szerkeszthető, ez láthatóan csak annyit jelent, hogy $a_{i+2} < a_{i+1} + a_i$. Bizonyítsuk ezt indirekt módon! Ha nem lenne ilyen, akkor teljesülne az, hogy $x_1 \geq 1$, valamint $x_2 \geq 2$, ezekből $x_3 \geq x_2 + x_1 \geq 1 + 2 = 3$, ebből $x_4 \geq x_2 + x_3 \geq 3 + 2 = 5$, és így tovább, végül rövid számolással belátható, hogy $x_{17} \geq x_{16} + x_{15} \geq 1597 + 987 = 2584$ teljesülne, ami nyilvánvaló ellentmondás. 17 számra így igaz lesz az állítás.

$n = 16$-ra azonban már lehet olyan számokat találni, amelyek megfelelők lesznek. Válasszunk minden i-re a_i-nek az i-edik Fibonacci-számot, $(F_0 = F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n)$. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy a 16-odik Fibonacci-szám kisebb, mint 2002, tehát minden szám a megadott intervallumba esik. Az így előállt számhármasokból pedig, mint szakaszok mérőszámaiból, nyilvánvaló módon nem szerkeszthető háromszög.