X. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Nagykanizsa, 2001. ápr. 6-10.

12. osztály

1. feladat: Egy k körvonal A pontjában merőlegest állítunk a kör síkjára, és megjelöljük ezen az egyenesen az A-tól különböző B pontot. Kössük össze ezután B-t a körvonal valamely tetszőlegesen választott M pontjával, és tekintsük az A pontnak a BM egyenesre eső P merőleges vetületét. Mi lesz a P pontok halmaza (mértani helye), ha M végigfut a k körön?

Dr. Kántor Sándor (Debrecen)

1. feladat I. megoldása: Jelöljük az A-n átmenő átmérő másik végpontját C-vel! Tudjuk, hogy $CM \perp AM$, valamint $CM \perp AB$, ami azt jelenti, hogy CM merőleges az ABM síkra, vagyis $CM \perp AP$, ami $BM \perp AP$-val együtt azt jelenti, hogy AP merőleges a BMC síkra, tehát $CP \perp AP$.

Mindezekből pedig azt kapjuk, hogy P a Thalész-tétel térbeli megfelelője miatt rajta van az AB és AC átmérőjű körökön, tehát ezek metszésvonalán is, ami egy kör (könnyen látható, hogy a körök nem esnek egybe). Gondolatmenetünk megfordítható, tehát a kör minden pontja megfelelő lesz, vagyis pontosan ez a kör lesz a keresett mértani hely.

---

2. feladat: Egy egyenlő szárú háromszög alapja a, szárai b hosszúságúak. Tudjuk, hogy $a^3 + b^3 = 3ab^2$. Határozzuk meg a szárak által bezárt szög nagyságát!

Bogdán Zoltán (Cegléd)

2. feladat I. megoldása: Osszuk el a feltétel-egyenlet mindkét oldalát $8b^3$-nal! Ekkor

$$\frac{a^3}{8b^3} + \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a}{2b}$$

Jelöljük a szárszög felét α-val, ekkor $\sin\alpha = \frac{a}{2b}$, vagyis $\sin^3\alpha = \frac{a^3}{8b^3}$, és az imént kapott egyenlőséget felhasználva ebből

$$\sin^3\alpha + \frac{1}{8} = \frac{3}{4}\sin\alpha$$

Ismert azonosság továbbá, hogy $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$. Ennek alapján

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$$

Helyettesítsük ezt vissza, azt kapjuk, hogy

$$\frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{4}\sin\alpha$$

Ezt megoldva $\sin 3\alpha = \frac{1}{2}$. Ebből mivel α hegyesszög, csak $\alpha = 10°$, illetve $\alpha = 50°$ lehetséges. Ez azt jelenti, hogy a szárszög $20°$-os vagy $100°$-os lehet.

---

3. feladat: Melyik n természetes szám esetén van a $\left(2 + x^2\right)^n + \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)^n = 18$ egyenletnek legtöbb valós gyöke? (Csak a különböző gyököket számoljuk.)

Dáné Károly (Marosvásárhely)

3. feladat I. megoldása: Használjuk fel a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget, továbbá azt az ismert összefüggést, miszerint egy szám négyzetének és reciproka négyzetének összege legalább 2 (ez is belátható a számtani és mértani közepekkel). Eszerint

$$18 = (2+x^2)^n + \left(2+\frac{1}{x^2}\right)^n \geq 2\sqrt{(2+x^2)^n\left(2+\frac{1}{x^2}\right)^n} =$$

$$= 2\sqrt{\left(4+2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+1\right)^n} \geq 2\sqrt{(4+2\cdot 2+1)^n} = 2\cdot 3^n$$

Vagyis $18 \geq 2\cdot 3^n$, ez pedig csak $n = 0, 1, 2$-t engedi meg. Az egyes eseteket megvizsgálhatjuk külön-külön:

$n = 0$. Ekkor az egyenlet $(2+x^2)^0 + \left(2+\frac{1}{x^2}\right)^0 = 18$, ennek láthatóan nincs megoldása.

$n = 1$. A kapott negyedfokú $(2+x^2) + \left(2+\frac{1}{x^2}\right) = 18$ egyenletnek négy megoldása adódik: ± 2 és $\pm\sqrt{3}$.

$n = 2$. A kapott nyolcadfokú egyenlet $(2+x^2)^2 + \left(2+\frac{1}{x^2}\right)^2 = 18$, ez a négyzetes és mértani közép közti egyenlőtlenség ismételt alkalmazásával

$$(2+x^2)^2 + \left(2+\frac{1}{x^2}\right)^2 \geq 2\left(4+2x^2+\frac{2}{x^2}+1\right) \geq 2\cdot 9$$

Ez azt jelenti, hogy az egyenletnek csak akkor lesz megoldása, ha $x^2 = \frac{1}{x^2}$, vagyis $x = \pm 1$. Ez két valós gyököt jelent.

A gyökök száma tehát $n = 1$ esetén lesz maximális.

---

4. feladat: Bizonyítsuk be, hogy hat egymás után következő pozitív egész szám szorzata nem lehet egy pozitív egész szám ötödik hatványával egyenlő.

Szabó Magda (Szabadka)

4. feladat I. megoldása: Először belátjuk, hogy hat egymást követő egész szám között van legalább egy, amely a többihez relatív prím. Bármelyik két szám legnagyobb közös osztója osztója lenne a különbségüknek is, amely ebben az esetben csak 1 és 5 között változhat. A hat szám közül három páratlan lesz, ezek közül csak egy osztható 3-mal és a maradék kettőből is csak egy osztható 5-tel. Így van egy szám, amelyik sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel nem osztható, így ez relatív prím lesz az összes többihez.

Ha igaz lenne az állítás, akkor ennek a számnak egy teljes ötödik hatványnak kéne lennie. Legyenek a számaink ekkor

$$x-2, x-1, x, x+1, x+2, x+3$$

Egyszerűsítsünk most azzal a tényezővel, amelyet az imént vizsgáltunk, ekkor a megmaradt számok szorzata $P(x)$ és $Q(x)$ közé esik, ahol

$$P(x) = (x-2)(x-1)x(x+1)(x+3) = x^5 - 5x^3 + 4x > (x-1)^5,$$

továbbá

$$Q(x) = (x-1)x(x+1)(x+2)(x+3) = x^5 + 5x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 6x < (x+1)^5$$

A becslések $x \geq 3$-ra teljesülnek. Ez azt jelenti, hogy a visszamaradt szorzat (amely maga is teljes ötödik hatvány) nem lehetne más, csak x^5. Ez azonban nem lehet, hisz a szorzat tartalmazza $x-1$-et és $x+1$ közül valamelyiket, amelyek viszont relatív prímek x-hez, ez pedig ellentmondás, ezzel az állítást bebizonyítottuk.

---

5. feladat: Bizonyítsuk be, hogy páratlan azoknak az (a, b, c, d, e) pozitív egész számokból álló rendezett számötösöknek a száme, amelyekre az

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e} = 1$$

egyenlőség teljesül.

Erdős Gábor (Nagykanizsa)

5. feladat I. megoldása: Az egyenlet teljesen szimmetrikus az öt változónkra. Ez azt jelenti, hogy azon megoldások, amelyekben $a \neq b$, párbaállíthatók a két változó felcserélésével. Ezeket a párokat elhagyhatjuk, a megoldások számának paritása nem változik. Vizsgáljuk tehát csak azokat a megoldásokat, melyekben $a = b$. Hasonlóan elegendő azon megoldások vizsgálatára szorítkozni, ahol $c = d$. Ez a $\frac{2}{a} + \frac{2}{c} + \frac{1}{e} = 1$ egyenlet megoldásait jelenti, azonban itt is elég azokkal foglalkoznunk, melyekre $a = c$, vagyis a

$$\frac{4}{a} + \frac{1}{e} = 1$$

egyenlet megoldásaival.

Az egyenletünk átrendezés után

$$(a-4)(e-1) = 4$$

Ennek viszont három megoldása van: $a = e = 5$, $a = 6, e = 3$, $a = 8, e = 2$. Ez pedig páratlan sok megoldás, ami azt jelenti, hogy az eredeti egyenletnek is páratlan sok megoldása kellett hogy legyen.

---

6. feladat: Legyen O az $A_1A_2 \ldots A_n$ szabályos sokszög köré írt kör középpontja. Adjuk meg a $B_k \in OA_k$ pontokat úgy, hogy

$$OB_k = \frac{OA_k}{n-k+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

teljesüljön. Igazoljuk, hogy a $B_1B_2 \ldots B_{n-1}A_n$ sokszög területe egyenlő az $A_1A_2 \ldots A_n$ sokszög területének az n-ed részével.

Bencze Mihály (Brassó)

6. feladat I. megoldása: Használjuk fel a háromszög trigonometrikus területképletét, és azt, hogy a csúcsokat O-val összekötő szakaszok egyenlő részekre osztják a teljes szöget. Ekkor érvényesek a következők: $R = OA_1$, $OB_1 = \frac{R}{n}$, $OB_2 = \frac{R}{n-1}$ miatt ha az OA_1A_2 háromszög területét T_1-gyel jelöljük, akkor

$$\frac{T_{OB_1B_2}}{T_1} = \frac{\frac{R^2}{n(n-1)}}{R^2} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Hasonlóképpen kapjuk, hogy $\frac{T_{OB_2B_3}}{T_1} = \frac{1}{(n-1)(n-2)}$, és így tovább, valamint $\frac{T_{OB_{n-1}A_n}}{T_1} = \frac{1}{2}$ és $\frac{T_{A_nOB_1}}{T_1} = \frac{1}{n}$. Ez pedig azt jelenti, hogy a kérdéses sokszög területét alkalmas háromszögek területösszegeként felírva a $T = T_{B_1B_2 \ldots B_{n-1}A_n}$ jelöléssel

$$\frac{T}{T_1} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \frac{1}{n},$$

amely jól ismert teleszkopikus összeggé alakítható:

$$\frac{T}{T_1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 1.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $T = T_1$, és mivel már láttuk, hogy T_1 a sokszög területének n-ed része, azért T is annyi lesz, ezzel pedig az állítást beláttuk.