X. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Nagykanizsa, 2001. ápr. 6-10.

11. osztály

1. feladat: Hány megoldása van az

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^{2001}$$

egyenletnek az egész számok körében?

Szabó Magda (Szabadka)

1. feladat I. megoldása: Az $x^2 + y^2 + z^2 = 2^n$ háromismeretlenes diofantoszi egyenlet megoldásai csupa páros számok. Ez a következőképp látható be: tegyük fel, hogy két páratlan és egy páros szám van, azaz $x = 2x_1 + 1$, $y = 2y_1 + 1$, $z = 2z_1$. Ekkor az egyenlet alakja a következő:

$$(2x_1 + 1)^2 + (2y_1 + 1)^2 + (2z)^2 = 2^n$$

$$2(x_1^2 + x_1 + y_1^2 + y_1 + z_1) = 2^{n-1} - 1$$

Tehát egy páros szám egyenlő lenne egy páratlannal, ami létezhetetlen. Ez azt jelenti, hogy mindhárom ismeretlennek párosnak kell lennie. Ekkor az egyenlet mindkét oldalát leoszthatjuk 4-gyel:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 2^{n-2}$$

Ismételjük meg ugyanezt az eljárást, végül arra jutunk $n = 2001$ esetén, hogy

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2,$$

ahol $x = a \cdot 2^{1000}$, $y = b \cdot 2^{1000}$, $z = c \cdot 2^{1000}$. Az egyenlet egész megoldásai úgy adódnak, hogy két változó értéke ± 1, a harmadik pedig 0. Ennek alapján az eredeti egyenlet megoldását úgy kapjuk, hogy két változó $\pm 2^{1000}$, a harmadik pedig 0.

---

2. feladat: Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó magasságának talppontja T. Mekkora az ABC, ATC és BTC háromszögekbe írható körök sugarainak összege, ha $TC = 5$ cm?

dr. Katz Sándor (Bonyhád)

2. feladat I. megoldása: Felhasználjuk azt a jól ismert összefüggést, miszerint egy derékszögű háromszögben a beírt háromszög sugarának kétszerese megegyezik a két befogó összegének és az átfogónak a különbségével, a szokásos jelölésekkel $2r = a + b - c$. Írjuk fel ezt az összefüggést mindhárom háromszögre! $2r = a + b - c$, $2r_1 = p + m - a$, $2r_2 = q + m - a$, ahol r_1 az ATC, r_2 a TCB háromszög beírt körének sugara, m a c oldalhoz tartozó magasság, $TB = q$, $AT = p$.

Adjuk össze a fenti egyenleteket:

$$2(r + r_1 + r_2) = 2m + p + q - c = 2m,$$

mivel $p + q = AT + TB = AB = c$. Ez pedig azt jelenti, hogy $r + r_1 + r_2 = m = 5$ cm.

---

3. feladat: Az a, b, c oldalú ABC háromszög szögei α, β, γ. Igazoljuk, hogy ha $3\alpha + 2\beta = 180°$, akkor $a^2 + bc - c^2 = 0$.

dr. Pintér Ferenc (Nagykanizsa)

3. feladat I. megoldása: Rendezzük át a bizonyítandó egyenlőséget! Azt kapjuk, hogy $\frac{a}{c} = \frac{c-b}{a}$. Forgassuk el a C pontot A körül az AB egyenesre! Jelöljük a kapott pontot D-vel! Mivel a háromszög szögeinek összege 180°, azért $3\alpha + 2\beta = \alpha + \beta + \gamma$, azaz $\gamma = 2\alpha + \beta$, amiből azt kapjuk, hogy γ a háromszög legnagyobb szöge. Ez azt jelenti, hogy c a legnagyobb oldal, tehát D az AB oldal belső pontja lesz. Ekkor $DB = c - b$. A CDA háromszög egyenlőszárú, így $CDA\angle = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$. Tudjuk továbbá, hogy $180^\circ - \alpha = 2(\alpha + \beta)$, vagyis $CDB\angle = 180^\circ - \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 180^\circ - (\alpha + \beta) = \gamma$. Ez azt jelenti, hogy a DBC és CBA háromszögek hasonlók, mivel szögeik megegyeznek, tehát a megfelelő oldalak aránya egyenlő:

$$\frac{a}{c} = \frac{CB}{AB} = \frac{DB}{CB} = \frac{c-b}{a},$$

és éppen ezt akartuk belátni.

---

4. feladat: Hány különböző szám van a következő 2001 szám között?

$$\left[\frac{1^2}{2001}\right], \left[\frac{2^2}{2001}\right], \dots, \left[\frac{2001^2}{2001}\right],$$

($[x]$ jelöli az x szám egészrészét, azaz azt a legnagyobb egész számot, amely x-nél még nem nagyobb.)

dr. Katz Sándor (Bonyhád)

4. feladat I. megoldása: Két szomszédos négyzetszám különbsége $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$. n függvényében ez szigorúan monoton nő. Mivel $1001^2 - 1000^2 = 2001$, azért $\frac{1001^2}{2001} - \frac{1000^2}{2001} = 1$ Amennyiben $n < 1000$, úgy $\frac{(n+1)^2}{2001} - \frac{n^2}{2001} < 1$ az előzőekből következően. Ez azt jelenti, hogy az

$$\left[\frac{1^2}{2001}\right] + \left[\frac{2^2}{2001}\right] + \ldots + \left[\frac{1000^2}{2001}\right]$$

számok sorozatában az első szám, azaz 0, és az utolsó szám, azaz 499 között minden lehetséges egész érték előfordul, ez összesen 500 különöböző egész szám.

$n > 1000$ esetén $\frac{(n+1)^2}{2001} - \frac{n^2}{2001} > 1$. Az egymást követő törtek különbsége így 1-nél nagyobb, tehát az

$$\left[\frac{1001^2}{2001}\right] + \left[\frac{1002^2}{2001}\right] + \ldots + \left[\frac{2001^2}{2001}\right]$$

számok mind különbözők lesznek, és mivel az első értéke 500, azért mindegyik különbözni fog az imént számbavett számoktól. Összesen ezekből 1001 darab lesz, tehát mindent egybevéve 1501 különböző szám lesz a feladat által megadott sorozatban.

---

5. feladat: Adott a síkon 2001 pont és egy egységnyi sugarú körvonal. Bizonyítsuk be, hogy található a körvonalon olyan pont, amelytől az adott pontokig mért távolságok összege legalább 2001.

Balázsi Borbála (Beregszász)

5. feladat I. megoldása: Válasszuk ki a körvonal tetszőleges A pontját! Amennyiben $\sum_{i=1}^{2001} AM_i \geq 2001$, akkor az állítás igaz lesz. Ha nem így van, akkor húzzuk be az A-n áthaladó átmérőt, és jelöljük a másik végpontját B-vel! Tudjuk, hogy $AB = 2$ és így a háromszögegyenlőtlenség miatt $AM_i + M_iB \geq 2$ bármely i-re, ez pedig azt jelenti, hogy

$$\sum_{i=1}^{2001} AM_i + \sum_{i=1}^{2001} M_iB = \sum_{i=1}^{2001}(AM_i + M_iB) \geq 2 \cdot 2001$$

Mivel pedig tudjuk, hogy $\sum_{i=1}^{2001} AM_i < 2001$, azért $\sum_{i=1}^{2001} M_iB > 2001$, ezzel pedig az állítást beláttuk.

---

6. feladat: Igazoljuk, hogy ha $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$, akkor

$$\frac{3-\sqrt{1-x_1^2}}{x_2+4}+\frac{3-\sqrt{1-x_2^2}}{x_3+4}+\ldots+\frac{3-\sqrt{1-x_n^2}}{x_1+4} \geq \frac{n}{2}.$$

Bencze Mihály (Brassó)

6. feladat I. megoldása: Bizonyítsunk először egy változóra!

$$\begin{aligned} \frac{3-\sqrt{1-x^2}}{x+4} &\geq \frac{1}{2} \\ 2-x &\geq 2\sqrt{1-x^2} \\ x(5x-4) &\geq 0, \end{aligned}$$

ami $x \in \left[\frac{4}{5}; 1\right]$ esetén mindig igaz lesz. Használjuk most föl a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget!

$$\frac{3-\sqrt{1-x_1^2}}{x_2+4}+\frac{3-\sqrt{1-x_2^2}}{x_3+4}+\ldots+\frac{3-\sqrt{1-x_n^2}}{x_1+4} \geq n\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\frac{3-\sqrt{1-x_k^2}}{x_k+4}} \geq \frac{n}{2},$$

ezzel pedig beláttuk az állítást.