X. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Nagykanizsa, 2001. ápr. 6-10.

10. osztály

1. feladat: Adott a síkban az $A_1A_2\ldots A_n$ $(n \geq 3)$ konvex sokszög, amelynél az A_kA_{k+1} oldal hossza a_k $(A_{n+1} \equiv A_1)$. Vetítsük merőlegesen a sokszöget az A_kA_{k+1} oldalának egyenesére és jelöljük a vetület hosszát d_k-val $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} + \ldots + \frac{a_n}{d_n} > 2.$$

Szabó Magda (Szabadka)

2. feladat: Határozzuk meg azokat a derékszögű háromszögeket, amelyek oldalai egész számok és területének mérőszáma háromszorosa kerülete mérőszámának.

Oláh György (Rév-Komárom)

3. feladat: Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó magasság talppontja D. Az ADC és BDC háromszögekbe írható körök sugara r_1 és r_2. Fejezzük ki az ABC háromszögbe írható kör r sugarát r_1 és r_2 segítségével.

dr. Katz Sándor (Bonyhád)

4. feladat: Az A halmaz a pozitív egész számokat tartalmazza 1-től 2001-ig bezárólag. Megadható-e néhány A_i $(i = 1, 2, \ldots, n; n \geq 2)$ részhalmaz úgy, hogy teljesüljenek a következő feltételek:

- a)$A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n = A$;
- b)$A_i \cap A_j = \emptyset; i \neq j; i, j = 1, 2, \ldots, n$;
- c)az A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$

halmazban a számok közül a legnagyobb egyenlő az összes többi szám összegével.

Balázsi Borbála (Beregszász)

5. feladat: Oldjuk meg az egyenletet, ha x egész szám:

$$\frac{1}{x^2 - 4x - 1} + x\,(x-1)^3 = x^3 + 4x^2 - \frac{21}{4}x.$$

Bíró Bálint (Eger)

6. feladat: Az $1, 2, 3, \ldots, 2n-1, 2n$ számokat két egyenlő csoportra osztjuk. Legyenek $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ az egyik, $b_1 > b_2 > \ldots > b_n$ a másik csoport elemei nagyság szerint növekvő, illetve csökkenő sorrendben. Bizonyítsuk be, hogy

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n| = n^2.$$

dr. Pintér Ferenc (Nagykanizsa)