X. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Nagykanizsa, 2001. ápr. 6-10.

10. osztály

1. feladat: Adott a síkban az $A_1A_2 \ldots A_n$ $(n \geq 3)$ konvex sokszög, amelynél az A_kA_{k+1} oldal hossza a_k $(A_{n+1} \equiv A_1)$. Vetítsük merőlegesen a sokszöget az A_kA_{k+1} oldalának egyenesére és jelöljük a vetület hosszát d_k-val $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} + \ldots + \frac{a_n}{d_n} > 2.$$

Szabó Magda (Szabadka)

1. feladat I. megoldása: Könnyen meggondolható, hogy a sokszögnek bármelyik oldalegyenesére vett vetülete kevesebb, mint a kerület fele, amit s-sel jelölünk. Ennek alapján felírható a következő összefüggés:

$$\frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} + \ldots + \frac{a_n}{d_n} > \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s} + \frac{a_n}{s} = \frac{1}{s}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \frac{1}{s} \cdot 2s = 2$$

Ezzel az állítást beláttuk.

---

2. feladat: Határozzuk meg azokat a derékszögű háromszögeket, amelyek oldalai egész számok és területének mérőszáma háromszorosa kerülete mérőszámának.

Oláh György (Rév-Komárom)

2. feladat I. megoldása: A feltétel azt jelenti, hogy $3(a + b + c) = \frac{ab}{2}$, amiből $c = \frac{ab}{6} - (a + b)$ következik. A háromszögünk derékszögű, ez azt jelenti, hogy $a^2 + b^2 = c^2$. Helyettesítsük be most ebbe c értékét!

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{ab}{6} - (a + b)\right)^2 = \frac{a^2b^2}{36} - \frac{ab}{3}(a + b) + a^2 + 2ab + b^2,$$

egyszerűbb alakra hozva $\frac{a^2b^2}{36} - \frac{ab}{3}(a + b) + 2ab = 0$. Rendezzünk át és egyszerűsítsünk ab-vel!

$$ab - 12(a + b) + 72 = 0,$$

ami azt jelenti, hogy

$$(a - 12)(b - 12) = 72.$$

A 72-t a sorrendet is figyelembe véve 12-féleképp lehet pozitív számok szorzatává bontani. A megoldások a következők:

$a - 12 = 1$, $b - 12 = 72$. Ekkor $a = 13, b = 84, c = 85$.
$a - 12 = 9$, $b - 12 = 8$. Ekkor $a = 21, b = 20, c = 29$.
$a - 12 = 3$, $b - 12 = 24$. Ekkor $a = 15, b = 36, c = 39$.
$a - 12 = 4$, $b - 12 = 18$. Ekkor $a = 16, b = 30, c = 34$.
$a - 12 = 6$, $b - 12 = 12$. Ekkor $a = 18, b = 24, c = 30$.
$a - 12 = 36$, $b - 12 = 2$. Ekkor $a = 48, b = 14, c = 50$.

Ellenőrizhető, hogy ezek a számhármasok valóban kielégítik az egyenletet, ha pedig a-t és b-t fölcseréljük, ezekkel egybevágó háromszögeket kapunk. A negatív szorzattá bontások közül kettő felel meg, a $(-8) \cdot (-9)$ és a $(-9) \cdot (-8)$, de a kapott 3,4,5 oldalú háromszög nem felel meg a kezdeti feltételnek.

---

3. feladat: Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó magasság talppontja D. Az ADC és BDC háromszögekbe írható körök sugara r_1 és r_2. Fejezzük ki az ABC háromszögbe írható kör r sugarát r_1 és r_2 segítségével.

dr. Katz Sándor (Bonyhád)

3. feladat I. megoldása: Az ADC és ABC háromszögek a szögeik egyenlősége miatt hasonlók, ez azt jelenti, hogy $r_1 : r = b : c$, ugyanígy a BDC és ABC háromszögek hasonlósága miatt $r_2 : r = a : c$. Emeljük mindkét egyenletet négyzetre és adjuk össze a megfelelő oldalakat!

$$\frac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$$

Ez azt jelenti, hogy $r^2 = r_1^2 + r_2^2$, tehát $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

---

4. feladat: Az A halmaz a pozitív egész számokat tartalmazza 1-től 2001-ig bezárólag. Megadható-e néhány A_i $(i = 1, 2, \dots, n; n \geq 2)$ részhalmaz úgy, hogy teljesüljenek a következő feltételek:

- a)$A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n = A$;
- b)$A_i \cap A_j = \emptyset; i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n$;
- c)az A_i $(i = 1, 2, \dots, n)$

halmazban a számok közül a legnagyobb egyenlő az összes többi szám összegével.

Balázsi Borbála (Beregszász)

4. feladat I. megoldása: Minden i-re az A_i halmaz elemeinek összege megegyezik a legnagyobb szám kétszeresével, tehát mindenképpen páros. Ez azt jelenti, hogy a részhalmazokra képezve ezen összegek összegét, az is páros lesz, de ez nem lesz más, mint a számok összege 1-től 2001-ig, azaz $\frac{2001 \cdot 2002}{2} = 2001 \cdot 1001$, ami páratlan szám. Ez pedig ellentmondás, tehát nem létezik a halmaznak megfelelő felbontása.

---

5. feladat: Oldjuk meg az egyenletet, ha x egész szám:

$$\frac{1}{x^2 - 4x - 1} + x\,(x-1)^3 = x^3 + 4x^2 - \frac{21}{4}x.$$

Bíró Bálint (Eger)

5. feladat I. megoldása: Az $x = 0$ láthatóan nem megoldás. Osszuk el mindkét oldalt x-szel, végezzük el a műveleteket és rendezzünk át!

$$\frac{1}{x^3 - 4x^2 - x} + x^3 - 4x^2 - x + \frac{17}{4} = 0$$

Helyettesítsünk most $a = x^2 - 4x^2 - x$-et, ami egy 0-tól különböző paraméter. Az egyenlet alakja ezután:

$$\frac{1}{a} + a + \frac{17}{4} = 0,$$

ami azt jelenti, hogy

$$4a^2 + 17a + 4 = 0.$$

Ennek két gyöke van, $a_1 = -4$, $a_2 = -\frac{1}{4}$. Tekintve, hogy x a feladat szerint egész szám, ezért a is az, vagyis a_2 nem lesz megfelelő. a_1-re az

$$x^3 - 4x^2 - x = -4$$

egyenlet rövid számolással szorzattá alakítható:

$$(x-4)(x+1)(x-1)=0.$$

Ennek pedig három gyöke van: $x_1 = 4$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, amelyek könnyen látható módon az eredeti egyenletnek is megoldásai.

---

6. feladat: Az $1, 2, 3, \ldots, 2n-1, 2n$ számokat két egyenlő csoportra osztjuk. Legyenek $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ az egyik, $b_1 > b_2 > \ldots > b_n$ a másik csoport elemei nagyság szerint növekvő, illetve csökkenő sorrendben. Bizonyítsuk be, hogy

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n| = n^2.$$

dr. Pintér Ferenc (Nagykanizsa)

6. feladat I. megoldása: Bármely $1 \leq k \leq n$-re a_k és b_k közül pontosan az egyik lesz n-nél nagyobb. Ez belátható abból, hogy ha $a_k \leq n$ és $b_k \leq n$ teljesülne, az azt jelentené, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ és $b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n$ számok közül mindegyik legfeljebb n lenne, de mivel ezek különböző számok, azért ez lehetetlen. Ugyanígy ha $a_k > n$, $b_k > n$, akkor $b_1, b_2, \ldots, b_k$ és $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$ mind $n+1$ és $2n$ közé esnek, ami szintén lehetetlen. Ez azt jelenti, hogy az összegben minden tag egy n-nél nagyobb és egy n-nél kisebb szám különbsége. Így az abszolútértékek összegét megkaphatjuk úgy, hogy az n-nél nagyobb számok összegéből kivonjuk az n-nél kisebb számok összegét. Ez az összeg, ha átrendezzük:

$$(n+1) + (n+2) + \ldots + (n+n) - (1+2+3+\ldots+n) =$$

$$= n^2 + (1+2+3+\ldots+n) - (1+2+3+\ldots+n) = n^2$$

, és éppen ezt kellett belátnunk.