X. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Nagykanizsa, 2001. ápr. 6-10.

9. osztály

1. feladat: Az $ABCD$ konvex négyszög átlói merőlegesek egymásra. Az AB és AD oldal E és F felezőpontjából merőlegest állítunk a szemközti CD és CB oldalegyenesekre. Mutassuk meg, hogy a két merőleges az AC átlón metszi egymást!

Dr. Katz Sándor (Bonyhád)

1. feladat I. megoldása: Jelöljük az AC szakasz felezőpontját G-vel! Ekkor a GE és CB, EF és BD, valamint a GF és CD szakaszok párhuzamosak lesznek egymással, mivel az elsőként említett szakaszok rendre az ABC, ABD és ADC háromszögek középvonalai lesznek. Az átlók merőlegessége miatt a GA és EF szakaszok merőlegesek, továbbá az F-ből BC-re állított merőleges egyszersmind merőleges lesz a GE szakaszra is, ugyanez mondható el az E-ből CD-re állított merőlegesről és a GF szakaszról. Ez azt jelenti, hogy a feladatban említett két egyenes és az AC átló a GEF háromszög magasságvonalait alkotják, így valóban egy ponton mennek át. Az egyetlen lehetőség, hogy ez ne így legyen, az lenne, ha a GEF háromszög nem jönne létre, de a három pont nem eshet egy egyenesre, mert akkor a párhuzamos szelők tétele miatt a BD átló átmenne C-n, ami lehetetlen.

---

2. feladat: Adjuk meg mindazokat a pozitív egész x, y, z számhármasokat, amelyekre

$$xyz + xy + xz + yz + x + y + z + 1 = 2001.$$

Oláh György (Rév-Komárom)

2. feladat I. megoldása: Alakítsuk át az egyenletet!

$$(x + 1)(y + 1)(z + 1) = 2001$$

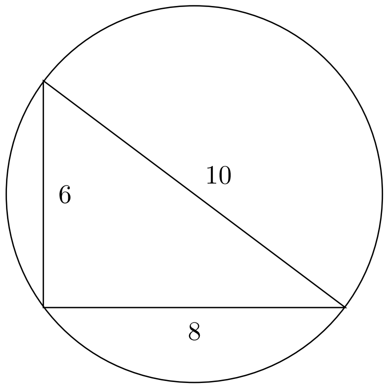
Mindhárom tényező 1-nél nagyobb, és mivel a 2001 prímtényezős felbontása $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$, azért ez csak egyféleképp tehető meg, így az (x, y, z) hármas a 2, 22, 8 számokat fogja tartalmazni valamilyen sorrendben. Ez hat megoldást jelent, és mivel az egyenlet láthatóan szimmetrikus a változókra, azért mindegyik valóban megoldás is lesz.

---

3. feladat: Lefedhető-e az 5 cm sugarú körlap 3 olyan kisebb körlappal, amelyek sugarai 2, 3 és 4 cm?

Szabó Magda (Szabadka)

3. feladat I. megoldása: A körlap helyett vizsgáljuk a körvonal lefedhetőségét!



Bármelyik körlap legfeljebb akkora ívet tud lefedni a körvonalból, amekkorához $2r$ hosszúságú ív tartozik (r a lefedő kör sugara). Mivel a körlap lefedéséhez le kell fedni a körvonalat is (az eltérő sugarak miatt a kis körök vonalai nem illeszkedhetnek a nagy körére), azért nem lesz megoldható a feladat, hiszen a két nagyobb kör átmérői összeilleszthetők egy derékszögű háromszöggé, melynek átfogója a nagy kör átmérője, így az általuk együtt maximálisan lefedett ívhossz a nagy kör kerületének fele, a kimaradt ívhosszt pedig a 2 egység sugarú körrel már nem tudjuk lefedni.

---

4. feladat: A kétjegyű számokat 35-től 42-ig egymás mellé írjuk tetszés szerinti sorrendben. Hány prímszám van az így kapható számok között?

Balázsi Borbála (Beregszász)

4. feladat I. megoldása: A számokban a páros és páratlan helyeken álló jegyek összege mindig ugyanannyi, a páros helyeken állóké $5+6+7+8+9+0+1+2=38$, a páratlan helyeken állóké $5\cdot 3+3\cdot 4=27$. A két összeg különbsége 11, tehát a számok mind osztható lesznek 11-gyel, és mivel nyilvánvalóan nagyobbak 11-nél, azért egyik sem lesz prím közülük.

---

5. feladat: Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész számot, amelynek 4 pozitív egész osztója van, és ezen osztóinak összege 108.

Maus Pál (Budapest)

5. feladat I. megoldása: Ismert, hogy egy szám prímtényezős felbontásából hogy lehet megkapni az osztóinak a számát: minden prímtényező kitevőjéhez egyet adunk, majd a kapott számokat összeszorozzuk. Mivel ez a szorzat 4, ez csak kétféleképp fordulhat elő:

a.) a szám egy prímszám harmadik hatványa. Az osztók összege ennek a prímnek a függvényében nyilván monoton nő. Ha a prím 3, az összeg kisebb, ha 5, akkor pedig nagyobb 108-nál. Ez azt jelenti, hogy nem lesz olyan prím, amelyre az összeg pontosan 108 lenne, tehát ilyen alakú megoldás nem létezik.

b.) a szám két prímszám szorzata. Legyenek ezek p és q. Az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy $p\leq q$. Az osztók összege $p+q+pq+1=(p+1)(q+1)=108$. A prímtényezős felbontást elkészítve $108=2^2\cdot 3^3$. Ha $p=2$, akkor $q=35$-öt kapunk, de a 35 nem prímszám. Ez azt jelenti, hogy $p\leq q$ miatt mindkét szám legalább 3, vagyis a $(p+1)(q+1)$ szorzatban mind a két tényező páros és legalább 4. Ez a prímfelbontás alapján csak azt az esetet engedi meg, hogy $p+1=6$ és $q+1=18$, tehát $p=5$, $q=17$, vagyis az egyetlen, a követelményeknek megfelelő szám az $5\cdot 17=85$.

---

6. feladat: Egy nemzetközi labdarúgó tornán minden csapat minden csapattal pontosan egyszer játszott. Győzelemért 3, döntetlenért 1, vereségért 0 pont járt. A bajnokság végén a csapatok pontszámainak összege 15 pont volt. Az utolsó helyezett 1 pontot gyűjtött, az utolsó előtti egyszer sem kapott ki. Hány pontot gyűjtött a második helyen végzett csapat ?

Erdős Gábor (Nagykanizsa)

6. feladat I. megoldása: Ha egy mérkőzés döntetlen, akkor 2, egyébként 3 pontot osztanak ki a csapatok közt. 3 csapat között a lejátszott 3 mérkőzésen legfeljebb 9 lehetett volna az összpontszám. 5 csapat között viszont 10 mérkőzésen már legalább 20 pontot kaptak volna a csapatok. Ez azt jelenti, hogy a tornán 4 együttes vett részt.

A hat mérkőzésen maximálisan 18 pontot oszthattak volna ki, ezt a számot minden egyes döntetlen eggyel csökkenti, tehát 3 döntetlenre végződött összecsapás volt. Az utolsó előtti csapat nem kapott ki, ha viszont nyert volna legalább egyszer, akkor minimum 5 pontja lenne, de ekkor az első három csapat összesen legalább 15 pontot gyűjtött volna, a negyedikkel együtt pedig 16-ot, ami lehetetlen. Ez azt jelenti, hogy a harmadik helyezett mindhárom mérkőzése döntetlen lett. Ezzel arra jutunk, hogy az utolsó helyezett a két elsőtől kikapott, az egyetlen kérdéses eredmény az első és második között lejátszott mérkőzésé. A feladat ugyan nem állítja kifejezetten, de feltehetjük, hogy a sorrend mindenhol pontszámkülönbség alapján jött létre, tehát az első csapat megverte a másodikat, így a második helyezett 4 pontot szerzett.