IX. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Dunaszerdahely, 2000. március 23-27.

12. osztály

1. feladat: Oldjuk meg a valós számok körében a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 4xy(x^2 - y^2) &= -1 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Katz Sándor (Bonyhád)

2. feladat: Az $ABCD$ konvex négyszög AC és BD átlói az O pontban metszik egymást, tegyük fel, hogy $DO > BO$. Legyen P az OD szakasznak az a pontja, amelyre $2 \cdot DP^2 = DO \cdot DB$ teljesül. Igazoljuk, hogy a P ponton át az AC átlóval párhuzamosan húzott egyenes a négyszöget két egyenlő területű részre bontja!

Szász Róbert (Marosvásárhely)

3. feladat: Igazoljuk, hogy ha $n \geq 1$, egész számok, akkor

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5 = \frac{1}{3}\Big(4(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^3 - (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2\Big).$$

Bencze Mihály (Brassó)

4. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha $x_1 > x_2 > \cdots > x_n > 0$ valós számok ($n > 1$), akkor

$$\frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1^4 + x_2^4} + \frac{x_2^3 - x_3^3}{x_2^4 + x_3^4} + \ldots + \frac{x_{n-1}^3 - x_n^3}{x_{n-1}^4 + x_n^4} < \frac{3}{2} \cdot \frac{x_1 - x_n}{x_1 x_n}.$$

Kacsó Ferenc (Marosvásárhely)

5. feladat: Igazoljuk, hogy ha $P(x)$ egy legalább elsőfokú egész együtthatós polinom és $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \geq 3$) különböző egész számok, akkor a következő egyenlőségek nem lehetnek egyszerre igazak:

$$P(x_1) = x_2;\ P(x_2) = x_3;\ \ldots\ ;\ P(x_n) = x_1.$$

Pintér Ferenc (Nagykanizsa)

6. feladat: Az $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ pontok egy körvonalon helyezkednek el. Hányféleképpen lehet legfeljebb 100 szín felhasználásával kiszínezni a pontokat úgy, hogy a szomszédos pontok különböző színűek legyenek?

Erdős Gábor (Nagykanizsa)