IX. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Dunaszerdahely, 2000. március 23-27.

11. osztály

1. feladat: Oldjuk meg a valós számok körében a következő egyenletet:

$$x^2y^2z^2(x^2+y^2+z^2)+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=2xyz(x^2y+y^2z+z^2x).$$

Árokszállási Tibor (Paks)

2. feladat: Tegyük fel, hogy az ABC hegyesszögű háromszögben $AB > AC$ és jelölje a háromszög köré írt kör középpontját O. Az A csúcsból húzott magasságvonal a BO egyenest az E, a CO egyenest az F pontban metszi. Igazoljuk, hogy $AE \cdot AF = BE \cdot CF$!

Ábrahám Kinga, Csorba Ferenc (Sopron, Győr)

3. feladat: Jelölje $M(a)$ az egész számegyenesen értelmezett

$$f_a(x) = \left| a + \cos 2x + \frac{1}{2+\cos^2 x} \right|$$

(a tetszőleges valós szám) függvény maximumát. Határozzuk meg az $M(a)$ számok minimumát!

Dáné Károly (Marosvásárhely)

4. feladat: Igazoljuk, hogy ha $n \geq 3$ egész szám, akkor

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2^n - 1) - 1$$

osztható 2^n-nel!

Bencze Mihály (Brassó)

5. feladat: Jelölje egy trapéz két párhuzamos oldalának hosszát a és c ($a > c$), a két szárának hosszát b és d, a két átlójának hosszát pedig e és f. Igazoljuk, hogy

$$d^2 - b^2 = (a-c)\frac{f^2-e^2}{a+c}.$$

Kántor Sándor (Debrecen)

6. feladat: Igazoljuk, hogy ha $n > 2$ egész szám, akkor $n+1$ tetszőlegesen választott valós szám között mindig van kettő — jelölje ezeket x és y — amelyekre igaz, hogy $0 < \frac{y-x}{1+xy} < \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$.

Lovász Gabriella (Csallóközaranyos)