IX. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Dunaszerdahely, 2000. március 23-27.

11. osztály

1. feladat: Oldjuk meg a valós számok körében a következő egyenletet:

$$x^2y^2z^2(x^2+y^2+z^2)+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=2xyz(x^2y+y^2z+z^2x).$$

Árokszállási Tibor (Paks)

1. feladat I. megoldása: Az egyenlet láthatóan szimmetrikus a változókra nézve. Az első eset, hogy valamelyik változó nulla, legyen ez ekkor x! Ebben az esetben a jobb oldal nulla lesz, és az egyenlet $y^2z^2=0$ formára redukálódik, tehát y és z közül az egyik változó nulla, a másik tetszőleges, tehát megoldást kapunk akkor, ha egy változó értékét tetszőlegesre választjuk, a másik kettőét pedig nullára.

Ha egyik változó sem 0, akkor osszuk el mindkét oldalt $x^2y^2z^2$-tel!

$$x^2+y^2+z^2+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}\right)$$

$$\left(x^2-2\frac{x}{z}+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z^2-2\frac{z}{y}+\frac{1}{y^2}\right)+\left(y^2-2\frac{y}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=0$$

$$\left(x-\frac{1}{z}\right)^2+\left(z-\frac{1}{y}\right)^2+\left(y-\frac{1}{x}\right)^2=0$$

Ez pedig csak akkor állhat fenn, ha $x=\frac{1}{z}$, valamint $z=\frac{1}{y}$, ebből $x=y$, másrészt a harmadik tagból $y=\frac{1}{x}$ következik, tehát csak $x=y=1$ lehet a megoldás (ekkor nyilván $z=1$ is teljesül), vagy pedig $x=y=-1$ (ekkor $z=-1$). Így tehát a megoldás: vagy mindhárom változó 1, vagy mindhárom -1, vagy két változó 0, és a harmadik tetszőleges.

---

2. feladat: Tegyük fel, hogy az ABC hegyesszögű háromszögben $AB>AC$ és jelölje a háromszög köré írt kör középpontját O. Az A csúcsból húzott magasságvonal a BO egyenest az E, a CO egyenest az F pontban metszi. Igazoljuk, hogy $AE\cdot AF=BE\cdot CF$!

Ábrahám Kinga, Csorba Ferenc (Sopron, Győr)

2. feladat I. megoldása: Rendezzük át a bizonyítandó egyenlőséget! $\frac{AE}{BE}=\frac{CF}{AF}$. Elegendő lenne belátnunk, hogy az AEB és CFA háromszögek hasonlók. Jelölje az AF egyenes metszéspontját a körrel R, a B-n és C-n átmenő átmérők végpontjai Q és P! A $BCQP$ négyször téglalap lesz, mivel átlói felezve metszik egymást és körbe írható, tehát paralelogramma és szomszédos szögei megegyeznek. Az O-n átmenő BC-vel párhuzamos tengelyre szimmetrikus lesz az elrendezés (az ABC háromszöget kivéve), ebből az következik, hogy $BR=PA$, tehát a hozzájuk tartozó ívek és az azokhoz tartozó kerületi szögek is megegyeznek, vagyis $BAR\angle=PCA\angle$. Az OEF háromszög egyenlő szárú lesz, mert az OCQ háromszöghöz O középponttal hasonló. Ebből viszont az következik, hogy a BEA és AFC szögek (mindkettő külső szög a háromszögben) megegyeznek, tehát igaz lesz az, hogy az AEB és CFA háromszögek hasonlók, ezzel az állítást bebizonyítottuk.

---

3. feladat: Jelölje $M(a)$ az egész számegyenesen értelmezett

$$f_a(x)=\left|a+\cos 2x+\frac{1}{2+\cos^2 x}\right|$$

(a tetszőleges valós szám) függvény maximumát. Határozzuk meg az $M(a)$ számok minimumát!

Dáné Károly (Marosvásárhely)

3. feladat I. megoldása: Alakítsuk át a definiáló képletet!

$$f_a(x) = \left|2\cos^2 x + 4 + \frac{1}{2+\cos^2 x} + a - 5\right| = |2t + \frac{1}{t} + a - 5|,$$

ha bevezetjük a $t = (2+\cos^2 x)$, $2 \le t \le 3$ értékkészletű paramétert. A $2t + \frac{1}{t}$ kifejezés a t értékkészletét jelentő intervallumon szigorúan növekvő, ebből az következik, hogy $2t + \frac{1}{t} \in [2\cdot 2 + \frac{1}{2}; 2\cdot 3 + \frac{1}{3}] = [\frac{9}{2}; \frac{19}{3}]$. Ez azt jelenti, hogy a $g_a(t) = 2t + \frac{1}{t} + a - 5$ függvény értékkészlete a $\left[a - \frac{1}{2}; a + \frac{4}{3}\right]$ intervallum lesz, így az $f_a(t) = |g_a(t)|$ függvény a maximumát valamelyik végpontban veszi föl. Vázolva az intervallum két végpontját definiáló függvényt (a függvényeként) látható, hogy a minimum $a = -\frac{5}{12}$-ben lesz, éspedig $\frac{11}{12}$. Ez precízen belátható abból, hogy $a < -\frac{5}{12}$ esetén

$$\left|a - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} - a > \frac{1}{2} + \frac{5}{12} = \frac{11}{12},$$

ha pedig $a > -\frac{5}{12}$, akkor azt kapjuk, hogy

$$\left|a + \frac{4}{3}\right| = a + \frac{4}{3} > -\frac{5}{12} + \frac{4}{3} = \frac{11}{12}$$

Ezzel pedig a feladat minden kérdését megválaszoltuk.

---

4. feladat: Igazoljuk, hogy ha $n \ge 3$ egész szám, akkor

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2^n - 1) - 1$$

osztható 2^n-nel!

Bencze Mihály (Brassó)

4. feladat I. megoldása: Jelöljük az $1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2^n-1) - 1$ számot E_n-nel! $E_3 = 2^3 \cdot 13$. Teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy tetszőleges n-re $E_n = 2^n \cdot M$, ahol M közelebbről meg nem határozott pozitív egész szám. Ez igaz lesz $n = 3$-ra, tegyük fel, hogy igaz $n = k$-ra, és bizonyítsuk be $n = k+1$-re!

$$\begin{aligned} E_{k+1} &= 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2^k-1)(2^k+1)(2^k+3)\ldots(2^k+(2^k-1)) = \\ &= (E_k+1)(2^k+1)(2^k+3)(2^k+5)\ldots(2^k+(2^k-1)) = 2^{k+1}\cdot M \end{aligned}$$

---

5. feladat: Jelölje egy trapéz két párhuzamos oldalának hosszát a és c ($a > c$), a két szárának hosszát b és d, a két átlójának hosszát pedig e és f. Igazoljuk, hogy

$$d^2 - b^2 = (a-c)\frac{f^2 - e^2}{a+c}.$$

Kántor Sándor (Debrecen)

5. feladat I. megoldása: Jelöljük az a és b oldalak által bezárt szöget α-val! Ekkor a koszinusztétel szerint $f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$, továbbá $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$ miatt $e^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha$. A két egyenlőségből:

$$\frac{f^2 - e^2}{a+c} = \frac{a^2 - c^2 - (a+c)2\cos\alpha}{a+c} = a - c - 2b\cos\alpha$$

Azt kell tehát belátnunk, hogy $d^2 - b^2 = (a-c)^2 - 2b(a-c)\cos\alpha$. Újra felhasználva a koszinusztételt ez azt jelenti, hogy

$$d^2 - b^2 = (a-c)^2 - (a^2 + b^2 - f^2) + (e^2 - b^2 - c^2),$$

tehát átrendezve

$$d^2 + b^2 = f^2 + e^2 - 2ac$$

Használjuk fel a Pitagorasz-tételt, legyen x a B pont és a C-ből a-ra állított merőleges talppontja közti szakasz hossza! Ekkor $d^2 = x^2 + m^2$, továbbá $b^2 = (a-c-x)^2 + m^2$, $f^2 = (x+c)^2 + m^2$, $e^2 = (a-x)^2 + m^2$. Ezeket az egyenlőségeket helyettesítük be a bizonyítandó összefüggésbe, és rövid számolás után azonosságra jutunk, ezzel az állítást beláttuk.

---

6. feladat: Igazoljuk, hogy ha $n > 2$ egész szám, akkor $n+1$ tetszőlegesen választott valós szám között mindig van kettő — jelölje ezeket x és y — amelyekre igaz, hogy $0 < \frac{y-x}{1+xy} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$.

Lovász Gabriella (Csallóközaranyos)

6. feladat I. megoldása: Válasszuk ki azokat a $b_1, b_2, \dots b_n, b_{n+1}$ valós számokat a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumból, amelyekre minden $1 \le i \le n+1$ esetén $\operatorname{tg} b_i = a_i$, ahol az a_i-k az adott valós számok. Ezt megtehetjük, hiszen a tangensfüggvény a fenti intervallumon szigorúan monoton nő, és értékkészlete a teljes valós számhalmaz. Az intervallumot n egyenlő részre osztva a skatulyaelv szerint lesz két szám, amely ugyanabba a részbe esik. Legyen ez a két szám α és β oly módon, hogy $\alpha > \beta$. Ekkor $0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{n}$, és ha $\operatorname{tg}\alpha = y$, $\operatorname{tg}\beta = x$ (a monotonitás miatt $y > x$), akkor az ismert tangensaddíciós tétel szerint

$$0 < \frac{y-x}{1+xy} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) < \operatorname{tg}\frac{\pi}{n},$$

az utolsó egyenlőtlenség pedig ismét csak a tangensfüggvény monotonitása miatt lesz igaz.