IX. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Dunaszerdahely, 2000. március 23-27.

10. osztály

1. feladat: Oldjuk meg az egész számok körében az

$$x^2 - y^2 - z^2 = 1$$
$$y + z - x = 3$$

egyenletrendszert!

Neubauer Ferenc (Munkács)

1. feladat I. megoldása: Fejezzük ki x-et a második egyenletből és helyettesítsük be az elsőbe! Azt kapjuk:

$$(y + z - 3)^2 - y^2 - z^2 = 1$$

Végezzük el a műveleteket, ekkor az adódik:

$$yz - 3z - 3y + 4 = 0$$

Ezt átalakítva $z(y - 3) = 3y - 4$-et kapjuk. $y = 3$-ra ez nyilván nem igaz. Ha $y \neq 3$, akkor átrendezve $z = \frac{3y-4}{y-3} = 3 + \frac{5}{y-3}$ Ez láthatóan csak akkor lesz egész, ha $y - 3|5$, ez azt jelenti, hogy $y - 3$ lehetséges értékei 1, 5, -1, -5. Ezekre az adott képletek alapján kiszámolva a változók értékét négy megoldást kapunk: $x = 9, y = 4, z = 8$, $x = -3; y = 2; z = -2$, $x = 9; y = 8; z = 4$ és $x = -3; y = -2; z = 2$.

---

2. feladat: Az ABC derékszögű háromszögben ($ACB\angle = 90°$) a beírt kör K középpontját a háromszög köré írt kör F középpontjával összekötő egyenes az átfogóval 45°-os szöget zár be. Számítsuk ki az átfogó és a beírt kör sugarának arányát!

Mészáros József (Galánta)

2. feladat I. megoldása: Jelöljük ρ-val a beírt kör sugarát! Ekkor $FD = KD = CE = \rho$ (a KCE és KFD szögek is 45°-osak), tehát FCB egyenlőszárú háromszög, hiszen az érintőszakaszok egyenlőségéből $BD = BE$ is teljesül. $AF = FB$, és a két előző egyenlőségünk miatt $FB = BC$. Ez azt jelenti, hogy $BAC\angle = 30°$, $ABC\angle = 60°$. Az AF szakasz hosszát c-vel jelölve $BC = c$ és $AC = c\sqrt{3}$. Derékszögű háromszögben ismert összefüggés, hogy $CB + AC - AB = 2\rho$. Ez pedig azt jelenti, hogy $c + c\sqrt{3} - 2c = 2\rho$, ebből pedig $p = \frac{c\sqrt{3}-c}{2} = \rho$, ebből c-t kiemelve $\frac{2c(\sqrt{3}-1)}{4} = \rho$. Ezt átrendezve pedig $\frac{2c}{\rho} = \frac{4}{\sqrt{3}-1}$, ezt gyöktelenítve pedig a kérdéses hányados $2\sqrt{3} + 1$.

---

3. feladat: Számítsuk ki az $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2000}$ összeget, ha $a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$!

Kántor Sándorné (Debrecen)

3. feladat I. megoldása: Bontsuk szét az a_n-t definiáló törtet!

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 n - n^2(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Így a feladatban szereplő összeg teleszkopikus:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{1999} + a_{2000} =$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{1999}} - \frac{1}{\sqrt{2000}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2000}} - \frac{1}{\sqrt{2001}}\right) =$$
$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2001}} \approx 0,9977645$$

4. feladat: Az ABC háromszög BC oldalán úgy vettük fel az $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ pontokat, hogy az $AA_1, AA_2, \ldots, AA_{n-1}$ félegyenesek a $BAC\angle = \alpha$ szöget n egyenlő részre osztják. Igazoljuk, hogy

$$AB \cdot AA_1 + AA_1 \cdot AA_2 + \ldots + AA_{n-1} \cdot AC = AB \cdot AC \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\alpha}{n}}.$$

Bencze Mihály (Brassó)

4. feladat I. megoldása: A $BAA_1, A_1AA_2, \ldots, A_{n-1}AC$ háromszögek együttesen kiadják az ABC háromszög területét. A trigonometrikus területképlettel (α az A-nál lévő szöget is jelöli)

$$T_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AA_1 \sin \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{2}AA_1 \cdot AA_2 \sin \frac{\alpha}{n} + \ldots + \frac{1}{2}AA_{n-1} \cdot AC \sin \frac{\alpha}{n} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin \alpha$$

Ebből pedig átrendezve azt kapjuk, hogy

$$AB \cdot AA_1 + AA_1 \cdot AA_2 + \ldots + AA_{n-1} \cdot AC = AB \cdot AC \frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\alpha}{n}},$$

és éppen ezt kellett igazolnunk.

---

5. feladat: A táblára felírtak 3 pozitív számot. Egy lépésben a táblára felírt számok közül egyet letörölhetünk és helyére a megmaradt két szám összegénél 1-gyel kisebb számot írhatunk. Néhány lépés után a táblán ez a három szám áll: 17, 75, 91. Lehetett-e a kiinduló számhármas a) 2, 2, 2; és b) 3, 3, 3 ?

Szabó Magda (Szabadka)

5. feladat I. megoldása: Nézzük meg először az a.) esetet! Ekkor három páros számból indulunk ki, egyet letörölve a helyére páratlant írunk, így lesz két páros és egy páratlan számunk. Ezek közül ha a páratlant töröljük le, a helyére páros kerül, de ha valamelyik párost, annak a helyébe páros fog kerülni. Ez pedig azt jelenti, hogy akárhány lépést is végzünk el, a kapott számhármas még mindig két páros és egy páratlan számot fog tartalmazni. Mivel pedig a feladat által megadott eredmény nem ilyen, azért nem lehetséges, hogy a $(2, 2, 2)$-ből indulva eljussunk ahhoz. A b.) esetben léteznek ilyen lépések. Egy lehetséges sorozatot megadunk:

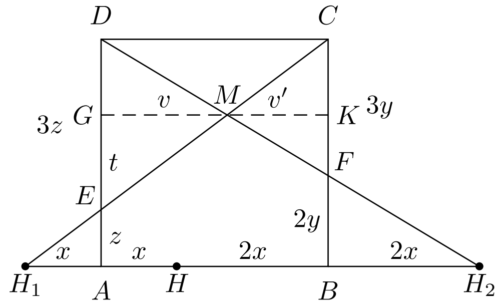
$$(3, 3, 3), (5, 3, 3), (5, 3, 7), (5, 11, 7), (17, 11, 7), (17, 11, 27), (17, 43, 27), (17, 43, 59), (17, 75, 59), (17, 75, 91)$$

---

6. feladat: Az $ABCD$ négyzet AB oldalának A-hoz közelebbi harmadolópontja H. A H pont tükörképe A-ra H_1, B-re H_2. A CH_1 és AD egyenesek metszéspontja E, a DH_2 és BC egyenesek metszéspontja F, végül a CH_1 és DH_2 egyenesek metszéspontja M. Hányad része az $ABCD$ négyzet területének a DEM és CFM háromszögek területének összege?

Bíró Bálint (Eger)

6. feladat I. megoldása: Jelöljük az $AH = AH_1$ távolságot x-szel! Ekkor $BH = BH_1 = 2x$. A BH_2F és CDF háromszögek hasonlók lesznek, mivel szögeik egyenlő nagyságúak. Ha most BF felét y-nal jelöljük, akkor a hasonlóság miatt $CF = 3y$. Ugyanígy az AH_1E és CDE háromszögek is hasonlók, tehát ha az AE hosszúságot z-vel jelöljük, akkor $DE = 3z$. Mivel a négyzet minden oldala egyenlő, azért $3x = 5y = 4z$.



Húzzunk M-en át párhuzamost AB-vel, legyenek ennek metszéspontjai AD-vel és BC-vel G és K! Legyen a GM szakasz hossza v, az MK-é v'! Ekkor írjuk fel a DEM és CFM háromszögek területösszegét!

$$T_{DEM} + T_{CFM} = \frac{3zv}{2} + \frac{3yv'}{2} = \frac{3}{2}\left[zv + y(3x - v)\right],$$

hiszen az nyilvánvaló, hogy $v + v' = 3x$. Tekintve, hogy $z = \frac{3}{4}x$, és $y = {}^{3}x$ (ezt láttuk be az előbb), azért

$$\begin{aligned} T_{DEM} + T_{CFM} &= \frac{3}{2}\left[\frac{3}{4}xv + \frac{3}{5}x \cdot 3x - \frac{3}{5}xv\right] = \\ &= \frac{3}{2}\left[\frac{3}{20}xv + \frac{9}{5}x^2\right] = \frac{3}{2}\left[\frac{3}{20}xv + \frac{36}{20}x^2\right] = \frac{9}{40}x[v + 12x] \end{aligned}$$

Ebben már csak két ismeretlen van, x és v. A négyzet területe $9x^2$, tehát elegendő meghatároznunk a $\frac{v}{x}$ hányadost. Jelöljük ehhez a GE szakasz hosszát t-vel! A GEM és AEH_1 háromszögek hasonlók, mivel szögeik megegyeznek. Ez azt jelenti, hogy $\frac{v}{t} = \frac{x}{z} = \frac{4}{3}$, tehát $3v = 4t$. Látható az is, hogy a DGM és DAH_2 háromszögek is hasonlók, hiszen szögeik megegyeznek. Ezért $\frac{3z-t}{v} = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$. Ezt átrendezve $3z - \frac{3}{4}v = \frac{3}{5}v$, tehát $20z = 9v$. Tudjuk azonban, hogy $4z = 3x$, ebből $5 \cdot 3x = 9v$, vagyis $5x = 3v$. Ezt beírva a korábban kapott területképletbe

$$T_{DEM} + T_{CFM} = \frac{9}{40}x\left[v + 12x\right] = \frac{9}{40}x\left[\frac{5}{3}x + \frac{36}{3}x\right] = 9x^2\frac{41}{120}$$

Mivel pedig az $ABCD$ négyzet területe $9x^2$, azért a két háromszög területösszege a négyzet területének $\frac{41}{120}$-ad része.