IX. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Dunaszerdahely, 2000. március 23-27.

9. osztály

1. feladat: Bizonyítsuk be, hogy minden k pozitív egész számra igaz, hogy a $(k+1)(k+2)(k+3)\cdot \ldots \cdot (k+2000)$ szorzat osztható 2000^{99}-nel!

Oláh György (Komárom)

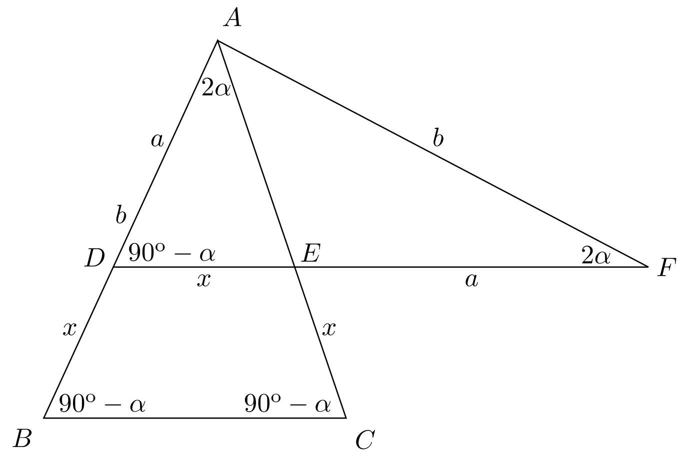
1. feladat I. megoldása: Bontsuk prímtényezőkre a 2000-et! $2000 = 2^4 \cdot 5^3$. Ez azt jelenti, hogy $2000^{99} = 2^{4\cdot 99} \cdot 5^{3\cdot 99} = 2^{396} \cdot 5^{297}$. A feladatban szereplő szorzat 2000 egymást követő számot tartalmaz, amelyek közül minden második páros, tehát a szorzat osztható lesz minimálisan 2^{1000}-nel, tehát biztosan osztható lesz 2^{396}-nal is. Hasonló módon a tényezők közt 400 lesz, melyek oszthatók 5-tel, vagyis a szorzat biztosan osztható lesz 5^{400}-nal, így 5^{297}-nel is. Mivel pedig 2^{396} és 5^{297} relatív prímek, azért a feladatban szereplő szorzat osztható ezek szorzatával, vagyis 2000^{99}-nel.

---

2. feladat: Ha az ABC háromszög AB és AC oldalán úgy vesszük fel a D és E pontokat, hogy $DE = DB = EC$ teljesüljön, akkor $AD = AE = BC$ is teljesül. Mekkorák az ABC háromszög szögei?

Katz Sándor (Bonyhád)

2. feladat I. megoldása: Jelöljük a BC, AD, AE szakaszok közös hosszát a-val, a BD, DE, EC szakaszokét x-szel! Ekkor $AB = AC = a + x$, tehát a háromszög egyenlőszárú, a két szár AB és AC lesz. Jelöljük a szárszög felét α-val, az alapon fekvő szögek összege így $90° - \alpha$.



Mindezekből következik, hogy $BCED$ egyenlőszárú trapéz, mivel az ADE és ABC háromszögek hasonlók a szárszög egyenlősége, valamint a mellette fekvő oldalak aránya miatt, továbbá abból, hogy az $BD = EC$ háromszög egyenlőszárú. Ez azt jelenti, hogy $ADE\angle = 90° - \alpha$. Vegyünk fel egy F pontot a DE egyenesen úgy, hogy az ADF háromszög egybevágó legyen ABC-vel! $AD = BC$ és $ADE\angle = 90° - \alpha$, tehát ez megtehető. Ennek a háromszögnek a DF szára $a + x$ hosszúságú, tehát $EF = a$. Mivel $DAF\angle = 90° - \alpha$, ebből pedig $DAE\angle = 2\alpha$ miatt $EAF\angle = 90° - 3\alpha$. $AE = EF = a$ miatt $EAF\angle = EFA\angle = 90° - 3\alpha$. Másrészről viszont tudjuk, hogy DFA egybevágó ABC-vel, tehát $EFA\angle = 2\alpha$. Ebből pedig, hogy $90° - 3\alpha = 2\alpha$, az adódik, hogy $\alpha = 18°$. A háromszög szögei ebből következően $36°$, $72°$, $72°$.

3. feladat: Igazoljuk, hogy bárhogyan is választunk ki a 2000-nél nem nagyobb pozitív egész számok közül 1001-et, biztosan lesz a kiválasztottak között két olyan szám, amelyek különbsége 4.

Erdős Gábor (Nagykanizsa)

3. feladat I. megoldása: Rendezzük el a számokat egy 4x500-as táblázatba!

1	5	9	...	1993	1997
2	6	10	...	1994	1998
3	7	11	...	1995	1999
4	8	12	...	1996	2000

Tekintve, hogy $1001 = 4 \cdot 250 + 1$, a skatulyaelv alapján lesz egy olyan sor, amelyből legalább 251 elemet kiválasztunk. Mivel azonban az 500 páros szám, azért csak 250 számot választhatunk ki úgy, hogy ne legyen köztük két szomszédos. Ez azt jelenti, hogy valamelyik sorból kiválasztunk két szomszédos elemet, ezek különbsége pedig 4 lesz. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

---

4. feladat: Az ABC derékszögű háromszög AB átfogóját a háromszögbe írt kör a D pontban érinti. Bizonyítsuk be, hogy az AD és DB oldalhosszúságú téglalap területe egyenlő az ABC háromszög területével!

Szabó Magda (Szabadka)

4. feladat I. megoldása: Jelöljük a háromszög oldalait a szokásos módon, legyen a sugár végpontja által kialakított két szakasz c-n x és y (x az A-hoz közelebbi). A Pitagorasz-tétel alapján $(x+y)^2 = a^2+b^2$, tehát $x^2+2xy+y^2 = a^2+b^2$. A körhöz húzott érintők egyenlősége miatt $a = y+r$, $b = x+r$, egymásból kivonva a megfelelő oldalakat $a-b = y-x$, vagyis $a^2-2ab+b^2 = x^2-2xy+y^2$. Ha ezt összevetjük az előbb kapott egyenlőséggel és kivonjuk egymásból a megfelelő oldalakat, azt kapjuk, hogy $4xy = 2ab$, amit átosztva $xy = \frac{ab}{2}$, ez pedig éppen a feladat állítása.

---

5. feladat: Az $1 \le x \le 3$ valós számokra az f függvényt a következő módon értelmezzük:

$$f(x) = \frac{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 9}{1 + 4x - x^2}.$$

Határozzuk meg f legkisebb értékét és azt az x helyet, ahol ezt a legkisebb értéket felveszi!

Árokszállási Eszter (Paks)

5. feladat I. megoldása: Alakítsuk át a nevezőt! $1 + 4x - x^2 = 5 - (x-2)^2$. Ez azt jelenti, hogy $1 \le x \le 3$ esetén a nevező 4 és 5 közé esik, az 5-öt pedig $x = 2$-ben veszi fel. A számláló is átalakítható alkalmas módon:

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 9 = x^2(x-2)^2 + (x-2)^2 + 5 = (x-2)^2(x^2+1) + 5 \ge 5,$$

és könnyen látható, hogy csak $x = 2$-ben lesz egyenlőség. Mivel pedig a számláló $x = 2$-ben veszi fel a minimumát, a nevező pedig ugyanitt a maximumát, azért a tört is $x = 2$-ben lesz minimális, és az értéke ekkor $f(2) = 1$ lesz.

---

6. feladat: Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$y(1-x)^2 + x(1-y)^2 + (x+y)^2 - x^3 - y^3 = 2000.$$

Kovács Béla (Szatmárnémeti)

6. feladat I. megoldása: Végezzük el a műveleteket és alakítsuk át ekvivalensen az egyenletet!

$$\begin{aligned} x+y+xy(x+y)+(x-y)^2-(x+y)(x^2-xy+y^2) &= 2000 \\ (x+y)(1+xy-x^2+xy-y^2)+(x-y)^2-1 &= 1999 \\ (x+y)\left[1-(x-y)^2\right]-\left[1-(x-y)^2\right] &= 1999 \\ \left[1-(x-y)^2\right](x+y-1) &= 1999 \end{aligned}$$

Az 1999 pedig prímszám, tehát a két prímtényező közül az egyik 1999 és a másik 1, vagy pedig az egyik -1999, a másik pedig -1. Ez összesen négy esetet jelent, figyelembe véve, hogy $x-y$ egész szám, ezek közül az egyetlen lehetséges, hogy $1-(x-y)^2=1$ és $x+y-1=1999$. Ennek az egyenletrendszernek pedig egyetlen megoldása van: $x=y=1000$.