VIII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Debrecen, 1999. márc. 25-29.

12. osztály

1. feladat: Az ABC háromszög belsejében lévő P pontra igaz, hogy $PAB\angle = PBC\angle = PCA\angle$. Mivel egyenlő a PAB szög tangensének értéke, ha $AB = 13$, $BC = 14$ és $AC = 15$?

Kiss Sándor (Nyíregyháza)

2. feladat: Egy minden valós számra értelmezett f függvény minden x és y értékre kielégíti a következő egyenlőtlenségeket:

$$f(x) \leq x,$$

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y).$$

Bizonyítsuk be, hogy minden x valós számra $f(x) = x$!

Kántor Sándorné (Debrecen)

3. feladat: Oldjuk meg a következő egyenletet, ha x és y egész számok:

$$x^3 - 23x^2 - 23y^2 + y^2x + 2x = 1849.$$

Bíró Bálint (Eger)

4. feladat: Legyen A a tízes számrendszerben felírt 1997^{1999} szám számjegyeinek az összege, B pedig az A számjegyeinek az összege. Számítsuk ki B számjegyeinek összegét!

Boros Zoltán (Debrecen)

5. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha az ABC háromszög hegyesszögű, akkor létezik olyan P pont a térben, amelyből az ABC háromszög bármely csúcsát a szemközti oldalegyenes bármely pontjával összekötő szakasz derékszögben látszik!

Kántor Sándor (Debrecen)

6. feladat: Legyen $a > 0$ és $b > 0$ adott valós számok, valamint $f(x, y, z) = \max\left\{ax + \frac{b}{y}, ay + \frac{b}{z}, az + \frac{b}{x}\right\}$, ahol $(x > 0, y > 0, z > 0)$. Igazoljuk, hogy az f függvénynek van minimuma, és határozzuk meg ezt a minimumot!

Szász Róbert és Dáné Károly (Marosvásárhely)