VIII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Debrecen, 1999. márc. 25-29.

12. osztály

1. feladat: Az ABC háromszög belsejében lévő P pontra igaz, hogy $PAB\angle = PBC\angle = PCA\angle$. Mivel egyenlő a PAB szög tangensének értéke, ha $AB = 13$, $BC = 14$ és $AC = 15$?

Kiss Sándor (Nyíregyháza)

1. feladat I. megoldása: Jelöljük a PAB szöget ϕ-vel, a PA szakasz hosszát x-szel, PB-ét y-nal, PC-ét z-vel! Ez azt jelenti, hogy a háromszög területe a trigonometrikus területképlet alapján

$$T = \frac{1}{2}\left((13x + 14y + 15z)\sin\phi\right),$$

ebből átrendezve pedig $\sin\phi = \frac{2T}{13x+14y+15z} = \frac{168}{13x+14y+15z}$, hiszen a háromszög területe a Héron-képlet alapján számolható, éspedig 84 egység.

Írjuk fel most a koszinusztételt a PAB, PBC, PCA háromszögekben.

$$\begin{aligned} y^2 &= 13^2 + x^2 - 26x\cos\phi \\ z^2 &= 14^2 + y^2 - 28\cos\phi \\ x^2 &= 15^2 + z^2 - 30x\cos\phi \end{aligned}$$

Adjuk össze a három egyenletet:

$$13^2 + 14^2 + 15^2 = (26x + 28y + 30z)\cos\phi.$$

Átrendezve $\cos\phi = \frac{13^2+14^2+15^2}{2(13x+14y+15z)}$. Ez pedig azt jelenti, hogy $\operatorname{tg}\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{168}{295}$.

---

2. feladat: Egy minden valós számra értelmezett f függvény minden x és y értékre kielégíti a következő egyenlőtlenségeket:

$$\begin{aligned} f(x) &\le x, \\ f(x+y) &\le f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Bizonyítsuk be, hogy minden x valós számra $f(x) = x$!

Kántor Sándorné (Debrecen)

2. feladat I. megoldása: Helyettesítsünk az első feltételbe $x = 0$-t, ekkor $f(x) \le 0$ adódik. $y = 0$-ra pedig a második feltételből $f(x) = f(x+0) \le f(x) + f(0)$, ami pedig azt jelenti, hogy $f(0) \ge 0$. Így tehát $f(0) = 0$. Behelyettesítve $y = -x$-et a második feltételbe $0 = f(x-x) \le f(x) + f(-x)$, és mivel $f(x) \le x$, valamint $f(-x) \le -x$, azért $f(x) + f(-x) \le 0$, így tehát $f(x) + f(-x) \le 0$, és így mindkét egyenlőtlenségben egyenlőségnek kell fennállnia, vagyis $f(x) = x$ és $f(-x) = -x$, és éppen ezt kellett bizonyítanunk.

---

3. feladat: Oldjuk meg a következő egyenletet, ha x és y egész számok:

$$x^3 - 23x^2 - 23y^2 + y^2x + 2x = 1849.$$

Bíró Bálint (Eger)

3. feladat I. megoldása: Végezzünk ekvivalens átalakításokat az egyenleten!

$$\begin{aligned} x(x^2+y^2)-23(x^2+y^2)+2x &= 1849 \\ (x-23)(x^2+y^2)+2x &= 1849 \\ (x-23)(x^2+y^2)+2(x-23) &= 1803 \\ (x-23)(x^2+y^2+2) &= 1803 \end{aligned}$$

Az 1803 prímfelbontása $3\cdot 601$. A második tényező biztosan pozitív, tehát az első is biztosan az lesz. Négy lehetőség adódik ekkor:

a.) $x-23=1$, ekkor $x=24$, emellett $x^2+y^2+2=1803$, ezt megoldva $y^2=1225$, így az egyenlet megoldásai az $x_1=24, y_1=35$ és $x_2=24, y_2=-35$ számpárok.

b.) $x-23=1803$, vagyis $x=1826$ és $x^2+y^2+2=1$. Ez viszont $y^2\geq 0$ miatt biztosan nem teljesülhet.

c.) $x-23=3$, vagyis $x=26$ és $x^2+y^2+2=601$. Azonban $26^2>601$, tehát ismét nem lesz megfelelő y.

d.) $x-23=601$, vagyis $x=624$ és $x^2+y^2+2=3$. Látható módon $y^2\geq 0$ miatt ez is ellentmondás.

Összességében véve azt kaptuk tehát, hogy csak két megoldás van: $x=24, y=35$, valamint $x=24, y=-35$.

---

4. feladat: Legyen A a tízes számrendszerben felírt 1997^{1999} szám számjegyeinek az összege, B pedig az A számjegyeinek az összege. Számítsuk ki B számjegyeinek összegét!

Boros Zoltán (Debrecen)

4. feladat I. megoldása: Az egyszerűbb jelölések kedvéért legyen $N=1997^{1999}$, és jelöljük a B szám keresett számjegyösszegét C-vel! Egy szám jegyei összegének 9-es maradéka ismeretesen megegyezik a szám 9-es maradékával. Ez azt jelenti, hogy N, A, B, C 9-es maradékai mind megegyeznek. 1997-nek 8 a 9-cel vett osztási maradéka, így páros hatványaié 1 lesz, páratlan hatványaié pedig 8 (ez teljes indukcióval például könnyen belátható).

Nyilvánvaló, hogy $N<10000^{1999}=10^{4\cdot 1999}=10^{7996}$. Ez pedig azt jelenti, hogy N legfeljebb 7996-jegyű, így számjegyösszege legfeljebb $9\cdot 7996=71964$, vagyis A legfeljebb ötjegyű, így jegyeinek összege, azaz B nem lehet több, mint 45. Az ilyen számok között a 39-nek a legnagyobb a számjegyösszege, ennek pedig 12, tehát B számjegyösszege, azaz C legfeljebb 12, és mivel láttuk, hogy a 9-es maradéka 8 lesz, azért csak $C=8$ lehet, ez lesz a feladat megoldása.

---

5. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha az ABC háromszög hegyesszögű, akkor létezik olyan P pont a térben, amelyből az ABC háromszög bármely csúcsát a szemközti oldalegyenes bármely pontjával összekötő szakasz derékszögben látszik!

Kántor Sándor (Debrecen)

5. feladat I. megoldása: Emeljünk gömböket az AB, BC, CA szakaszokra! Ezek metszéspontját jelöljük P-vel, ilyen pont létezik, mivel ABC hegyesszögű. A Thalész-tétel szerint APB, BPC, CPA derékszögek, mivel a három pont a gömbök egy-egy főkörét határozza meg. Válasszunk ki most egy tetszőleges M pontot a BC egyenesen! A P, B és C pontok meghatároznak egy síkot, ebben nyilván benne lesz M is, továbbá ebből következően a PM szakasz is. Mivel azonban a PA egyenes merőleges a PB és PC egy síkban fekvő egyenesekre, melyek egy pontban metszik egymást, azért merőleges a síkra is, tehát derékszöget zár be annak minden egyenesével, tehát speciálisan PM-mel is.

---

6. feladat: Legyen $a>0$ és $b>0$ adott valós számok, valamint $f(x,y,z)=\max\left\{ax+\frac{b}{y}, ay+\frac{b}{z}, az+\frac{b}{x}\right\}$, ahol $(x>0, y>0, z>0)$. Igazoljuk, hogy az f függvénynek van minimuma, és határozzuk meg ezt a minimumot!

Szász Róbert és Dáné Károly (Marosvásárhely)

6. feladat I. megoldása: Használjuk fel a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget!

$$\left(ax+\frac{b}{y}\right)+\left(ay+\frac{b}{z}\right)+\left(az+\frac{b}{x}\right)=\left(ax+\frac{b}{x}\right)+\left(ay+\frac{b}{y}\right)+\left(az+\frac{b}{z}\right)\geq$$

$$\geq 2\sqrt{ab}+2\sqrt{ab}+2\sqrt{ab}=6\sqrt{ab}$$

Ez azt jelenti, hogy az összeg három tagjának a maximuma legalább ennek a számnak a harmada lesz, vagyis $2\sqrt{ab}$. Ezt az értéket azonban föl is veszi a függvény, mégpedig $x=y=z=\sqrt{\frac{b}{a}}$ választással, tehát ennyi lesz a minimum, és ez el is érhető.