VIII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Debrecen, 1999. márc. 25-29.

11. osztály

1. feladat: Melyik az a háromjegyű szám, amelynek négyzete is és köbe is ugyanezzel a háromjegyű számmal végződik?

Bogdán Zoltán (Cegléd)

1. feladat I. megoldása: Jelöljük a számot n-nel! Az első feltétel szerint $n^2-n=n(n-1)$ osztható 1000-rel. Közismert, hogy n és $n-1$ relatív prímek, tehát az egyik osztható lesz 125-tel, a másik 8-cal (nyilvánvalóan egyik sem lehet 1). Ha n osztható 125-tel és háromjegyű, akkor $n-1$ csak akkor lesz 8-cal osztható, ha $n=625$. Ha pedig $n-1$ osztható 125-tel, akkor n csak abban az esetben lesz 8-cal osztható, ha $n=376$. Mivel pedig n^3-n is osztható $n(n-1)$-gyel, azért erre a két számra n^3-n osztható lesz 1000-rel, tehát ez a két szám mindkét feltételt kielégíti, és láttuk, hogy más számok nem jöhetnek szóba.

---

2. feladat: Tekintsük az összes olyan $P(x,y)$ pontot, amelynek koordinátáira $x^2y^2+x^2-10xy-8x+16=0$ teljesül. Milyen értékeket vehet fel az xy szorzat?

Kántor Sándorné (Debrecen)

2. feladat I. megoldása: Alakítsuk át a feltételi egyenletet!

$$(xy-5)^2+(x-4)^2=25$$

$$(xy-5)^2=25-(x-4)^2$$

Ebből látható, hogy $(xy-5)^2\leq 25$, ebből pedig rövid számolás után $xy\in[0;10]$ adódik. Az is látható továbbá, hogy minden lehetséges xy értékre van egy (általában 2) x érték, amely teljesíti az egyenletet, ehhez pedig könnyen találhatunk y értéket (egyedül kérdéses az $x=0$ eset, de ekkor $x=8$ is ugyanazt az eredményt adja a jobb oldalon). Tehát xy csak a $[0;10]$ intervallumba eshet, és ezen belül minden értékhez található megfelelő x,y pár (vagyis pont). Ez pedig azt jelenti, hogy xy lehetséges értékei a 0 és 10 közé eső valós számok.

---

3. feladat: Határozzuk meg az összes olyan valós együtthatós polinomot, amelyre minden valós x esetén teljesül az

$$x\cdot p(x)\cdot p(1-x)+x^3+100\geq 0$$

egyenlőtlenség!

Erdős Gábor (Nagykanizsa)

3. feladat I. megoldása: Ha a keresett polinom n-edfokú ($n>1$), akkor a bal oldalon egy $2n+1$-edfokú polinom áll, aminek mindig van negatív értéke, hiszen a fokszám páratlan. Ha a polinom konstans, akkor a bal oldal harmadfokú, és arra is igaz ez a megállapítás. Ez azt jelenti, hogy a polinomunk csak elsőfokú lehet. Legyen $p(x)=ax+b$. Ekkor a bal oldal

$$(1-a^2)x^3+a^2x^2+(b^2+ab)x+100$$

alakú. Ez nem lehet egy harmadfokú polinom, tehát $1-a^2=0$ szükséges, ami azt jelenti, hogy $a^2=1$. A kapott polinom ekkor másodfokú lesz, főegyütthatója pozitív, tehát csak akkor lehetne negatív értéke, ha a diszkrimináns pozitív lenne, ez pedig azt jelenti, hogy

$$(b^2+ab)^2-400a^2\leq 0,$$

tehát $|b^2 + ab| \leq 20$. Két eset lehetséges:

1.) $a = 1$. Ekkor $-5 \leq b \leq 4$, vagyis $p(x) = x + b$, ahol $b \in [-5; 4]$

2.) $a = -1$. Ekkor $-4 \leq b \leq 5$, vagyis $p(x) = -x + b$, ahol $b \in [-4; 5]$.

Ez a két polinom fog tehát megfelelni a feltételnek, és a gondolatmenet szerint csak ezek.

---

4. feladat: Legyen S az ABC hegyesszögű háromszög súlypontja, és r a háromszög köré írt kör sugara. Bizonyítsuk be, hogy

$$AS^2 + BS^2 + CS^2 > \frac{8r^2}{3}.$$

Oláh György (Révkomárom)

4. feladat I. megoldása: Használjuk fel először, hogy a súlypont a súlyvonalakat 2:1 arányban osztja, továbbá a súlyvonalak ismert felírását a háromszög oldalaival:

$$AS^2 + BS^2 + CS^2 = \frac{4}{9}(s_a^2 + s_b^2 + s_c^2) = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Felhasználva egy körben az ívhez tartozó húr és kerületi szög közti összefüggést:

$$\frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{3}\left((2r\sin\alpha)^2 + (2r\sin\beta)^2 + (2r\sin\gamma)^2\right) = \frac{4r^2}{3}(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)$$

Felhasználva most, hogy bármely ϕ szögre $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$, továbbá, hogy $\sin\phi = \sin(180° - \phi)$, felírhatjuk a következőt:

$$\frac{4r^2}{3}(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) = \frac{4r^2}{3}\left(2 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + \sin^2(\alpha + \beta)\right)$$

Újra felhasználva az előző összefüggést és elvégezve a műveleteket:

$$\frac{4r^2}{3}\left(2 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + \sin^2(\alpha + \beta)\right) = \frac{4r^2}{3}(2 - 2\cos^2\alpha\cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta)$$

És végül ezt a kifejezést a második tényezőben $2\cos\alpha\cos\beta$-t kiemelve és az addíciós tételt alkalmazva

$$\frac{4r^2}{3}(2 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$$

alakra hozhatjuk, mivel pedig a háromszögünk hegyesszögű, azért $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma > 0$, ebből pedig az adódik, hogy

$$AS^2 + BS^2 + CS^2 > \frac{4r^2}{3} \cdot 2 = \frac{8r^2}{3},$$

és éppen ezt akartuk belátni.

---

5. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder súlypontja mind a négy csúcstól egyenlő távolságra van, akkor bármely két szemközti élpár felezőpontjait összekötő szakasz merőleges mindkét élre.

Kiss Sándor (Nyíregyháza)

5. feladat I. megoldása: Válasszuk ki a tetraéder két csúcsát, C-t és D-t, valamint a szemközti él felezőpontját, F-et! Elegendő bebizonyítanunk, hogy a CFD háromszög egyenlő szárú, ekkor az F pontból induló súlyvonal, amely CD-t E-ben metszi, merőleges lesz a CD oldalra. A gondolatmenet nyilván nem fog függni attól, hogy melyik élt választottuk ki, azért a többi négy élre is igaz lesz hasonló állítás, tehát bebizonyítanánk a feladat által kért összefüggést.

Ennek belátásához használjuk fel, hogy a feladat szerint $AS = BS = CS = DS$, mivel pedig a súlypont ismert arányban osztja a súlyvonalakat, azért ebből $SS_1 = SS_2$, tehát $CS_1 = DS_2$ következik. S_1 súlypont ABD-ben, továbbá S_2 súlypont ABC-ben, így 2:1 arányban osztják a DF, illetve CF

szakaszt, továbbá az S_1SD és S_2CS háromszögek egybevágók az S-nél lévő szögeik és az őket közrefogó oldalak egyenlősége miatt, amiből azt kapjuk, hogy CDS_1S_2 egyenlőszárú trapéz lesz. Ez viszont azt jelenti, hogy CDF valóban egyenlő szárú. Ezzel pedig az állítást bebizonyítottuk.

---

6. feladat: Igazoljuk, hogy ha $x_1, x_2, \ldots, x_n (n \geq 3)$ különböző pozitív egész számok, akkor

$$\frac{1}{{x_1}^3} + \ldots + \frac{1}{{x_n}^3} < \frac{11}{8} - \frac{1}{2n(n-1)}.$$

Bencze Mihály (Brassó)

6. feladat I. megoldása: Az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, mivel pedig a számok pozitív egészek, azért $1 \leq x_1,\ 2 \leq x_2,\ n \leq x_n$ is teljesülni fog. Ebből már adódik, hogy

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} + \ldots + \frac{1}{x_n^3} < \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} <$$

$$< 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-2)(n-1)n}$$

$$= \frac{9}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n-1)n} = \frac{11}{8} - \frac{1}{2(n-1)n}$$

Az utolsó előtti egyenlőség a törtek elemi törtekre bontásával látható, amikor is egy teleszkopikus összeg alakul ki, hiszen $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n+2}$. A kapott egyenlőtlenség pedig éppen az, amit bizonyítani kellett.