VIII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Debrecen, 1999. márc. 25-29.

10. osztály

1. feladat: Bizonyítsuk be, hogy $1997^{1999} + 1999^{1997}$ osztható 3996-tal.

Benedek Ilona (Vác)

1. feladat I. megoldása: Alakítsuk át a kifejezést alkalmas módon!

$$\begin{aligned} 1997^{1999} + 1999^{1997} &= 1997^{2+1997} + 1999^{1997} = (1997^2 - 1) \cdot 1997^{1997} + 1997^{1997} + 1999^{1997} = \\ &= 1996 \cdot 1998 \cdot 1997^{1997} + 3996(1997^{1996} - 1997^{1995} \cdot 1999 + \ldots + 1999^{1996}) = \\ &= 3996 \cdot (998 \cdot 1997^{1997} + 1997^{1996} - 1997^{1995} \cdot 1999 + \ldots + 1999)^{1996} \end{aligned}$$

Ez pedig jól láthatóan azt jelenti, hogy a kifejezés valóban osztható 3996-tal.

---

2. feladat: Az $ABCD$ trapéz csúcsai egy körre illeszkednek. A trapéz AD és BC szárainak meghosszabbításai az M pontban metszik egymást. A körhöz a B, illetve D pontokban húzott érintők metszéspontja N. Bizonyítsuk be, hogy MN párhuzamos AB-vel.

Neubauer Ferenc (Munkács)

2. feladat I. megoldása: Mivel a trapéz húrnégyszög, azért egyenlőszárú, tehát az AD és BC ívek megegyeznek, tehát egyenlők lesznek az ABD és BDC szögek, valamint mindkettő egyenlő lesz a BC ívhez tartozó CBN érintő szárú kerületi szöggel. Hasonló okok miatt $ABD\angle = ADP\angle = MDN\angle$. A kettőből azt kapjuk, hogy $MDN\angle = MBN\angle$, tehát B és D is ugyanazon az MN fölé emelt látóköríven vannak, ami azt jelenti, hogy $BDMN$ húrnégyszög lesz. Ezért a DBC és DNM szögek meg fognak egyezni. Mivel pedig NDC a DC ívhez tartozó érintő szárú kerületi szög, azért meg fog egyezni DBC-vel, tehát $NDC\angle = DMN\angle$, vagyis $DC \parallel MN$, $ABCD$ trapéztulajdonsága miatt pedig $AB \parallel MN$, amit bizonyítani kellett.

---

3. feladat: Határozzuk meg az m valós paraméternek azokat az értékeit, amelyekre a $9mx(3x-1)(3x-2)(x-1) = 1$ egyenletnek négy (nem feltétlenül különböző) valós gyöke van.

Péter András (Arad)

3. feladat I. megoldása: Rendezzük át az egyenletet, ekkor azt kapjuk, hogy

$$m(9x^2 - 9x)(9x^2 - 9x + 2) = 1$$

Vezessük be most a $t = 9x^2 - 9x + 1$ jelölést! Ennek segítségével az egyenlet $m(t^2 - 1) = 1$ alakba írható. Ez pedig azt jelenti, hogy $t_1 = -\sqrt{\frac{m+1}{m}}$, vagy pedig $t_2 = \sqrt{\frac{m+1}{m}}$. Mindkettőnek valósnak kell lennie, ami azt jelenti, hogy $m \leq -1$ vagy $m > 0$ szükséges a megoldhatósághoz.

a.) Ha $9x^2 - 9x + 1 = t_1$, akkor a diszkriminánsnak nemnegatívnak kell lennie. Ez azt jelenti, hogy $t_1 \geq \frac{5}{4}$, ami $\frac{m+1}{m} \leq \frac{25}{16}$-ot jelenti, ami átrendezve akkor lesz igaz, ha $m < 0$ vagy $m \geq \frac{16}{9}$.

b.) Ha $9x^2 - 9x + 1 = t_2$, akkor teljesen hasonló megfontolások alapján $t_2 \geq -\frac{5}{4}$, tehát $\sqrt{\frac{m+1}{m}} \geq -\frac{5}{4}$, ez pedig minden olyan m-re igaz, ahol a gyökvonás értelmezve van.

A kapott két feltételt összevetve azt kapjuk, hogy akkor lesz 4 valós megoldása az egyenletnek, ha $m \leq -1$ vagy pedig $m \geq \frac{16}{9}$.

---

4. feladat: Adott az ABC egyenlő oldalú háromszög belsejében a P pont úgy, hogy $PA = 6$, $PB = 8$, $PC = 12$. Határozzuk meg az ABC háromszög területét.

Kántor Sándorné (Debrecen)

4. feladat I. megoldása: Szerkesszünk AP, PB és PC fölé szabályos háromszögeket, legyen ezeknek a harmadik csúcsa rendre P_1, P_2, P_3. Be fogjuk látni, hogy az $AP_1BP_2CP_3$ hatszög területe egyenlő lesz az ABC háromszög területének kétszeresével, továbbá a három szabályos háromszög mellett kialakuló háromszögek páronként egybevágók lesznek.

Ehhez először lássuk be, hogy az AP_1B és APC háromszögek egybevágók. Ez belátható azzal, hogy egy A körüli $+60°$-os forgatás az elsőt a másodikba viszi. Ez azt jelenti, hogy a P_1B szakasz hossza is 12, mint a PC szakaszé. Teljesen hasonlóan adódik, hogy a CBP_2 és APB háromszögek is egybevágók, tehát $P_2C = 6$, továbbá a PBC és ACP_3 háromszögek egybevágók, és így $P_3A = 8$. Ezek szerint a szabályos háromszögek mellett kialakuló háromszögek mind egybevágók, mert 6, 8 és 12 hosszúságú oldalakkal rendelkeznek. Következik továbbá az is, hogy a hatszög területe ABC területének kétszerese, mivel a "kimaradó" háromszögek rendre egybevágók egy-egy olyan háromszöggel, melyek együttesen lefedik az ABC-t. Mindhárom 6, 8, 12 oldalú háromszög területe a Héron-képlet szerint $\sqrt{455}$, a szabályos háromszögek területét pedig az oldalhosszukból tudjuk, ami azt jelenti, hogy

$$T_{ABC} = \frac{1}{2}T_{AP_1BP_2CP_3} = \frac{61\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{455}}{2} \approx 84,8$$

---

5. feladat: Legyenek $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ valós számok. Határozzuk meg az x, $y + \frac{1}{z}$, $z + \frac{1}{x}$ és $\frac{1}{y}$ számok legkisebbikének lehető legnagyobb értékét!

András Szilárd (Kolozsvár)

5. feladat I. megoldása: Jelöljük m-mel a kifejezések minimumát! Mivel $m \leq x$, azért $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{m}$, ez azt jelenti, hogy $m \leq z + \frac{1}{x} \leq z + \frac{1}{m}$. Mivel $m \leq \frac{1}{y}$, azért $y \leq \frac{1}{m}$, tehát $m \leq y + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{z}$. Ez a két egyenlőtlenség pedig azt jelenti, hogy egyrészről $m - \frac{1}{m} \leq z$, másrészről $m - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{z}$, tehát $m - \frac{1}{m} \leq 1$, ami átrendezve $m^2 - m - 1 \leq 0$. Ez a másodfokú egyenlőtlenség $m \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$-t jelenti, tehát $m \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Tekintsük továbbá a $z = 1$, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ értékeket! Ezekre a feladatban szereplő összes kifejezés megegyezik, és mindegyik $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ez pedig azt jelenti, hogy a minimum legkisebb felső korlátja $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ lesz.

---

6. feladat: Hány részre osztják fel a síkot egy 1999 oldalú szabályos sokszög oldalegyenesei?

Oláh György (Révkomárom)

6. feladat I. megoldása: Tetszőleges n-re vegyünk fel n db egyenest úgy, hogy ne legyen két párhuzamos, és ne menjen át három egy ponton (nyilvánvalóan a sokszög oldalai is ilyen egyenesek lesznek). Jelöljük $p(n)$-nel a kialakult síktartományok számát. 3 egyenes könnyen látható módon 7 részre osztja a síkot. Ha behúzunk egy új egyenest a meglévő n mellé, amely minden egyenest metsz, akkor az egyenes mindkét partján $n+1$ síktartomány jön létre, és megszűnik $n+1$, tehát összesen $n+1$ új síktartományunk lesz, azaz $p(n+1) = p(n) + n + 1$. Ebből pedig már felírható a következő:

$$p(n) = n + p(n-1) = n + (n-1) + \ldots + 4 + p(3) = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

Ezt pedig $n = 1999$ esetére kiszámolva azt kapjuk, hogy $p(1999) = 1999001$.