VIII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Debrecen, 1999. márc. 25-29.

9. osztály

1. feladat: Milyen p és q prímszámokra teljesül a $3(p^2 - q) = q^2 - p$ egyenlet?

Oláh György (Révkomárom)

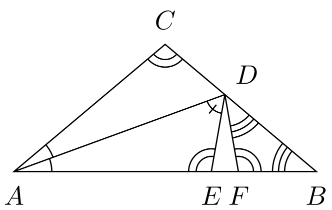
1. feladat I. megoldása: Alakítsuk át az egyenletet: $(3p+1)p = q(q+3)$. Mivel p és q prímek, azért $3p+1$-nek q-val, $q+3$-nak p-vel kell oszthatónak lennie. Ebből látható, hogy a két prím nem lehet egyenlő. Ha az egyik esetben a hányados k, a másikban l, akkor az egyenlet $kqp = qlp$, amiből $k = l$ szükségképpen következik. Ekkor a két oszthatóság $3p + 1 = kq$ és $q + 3 = kp$ alakba írható, amit megoldva $(k^2 - 3)p = 3k + 1$ adódik. $k > 4$-re a bal oldal első tényezője már nagyobb lesz a jobb oldalnál, ezért elegendő a $k \leq 4$ esetet vizsgálni. Egyszerű behelyettesítéssel kapjuk, hogy csak $k = 2$ esetén lesz a p valóban prímszám. Ebben az esetben $p = 7$ és $q = 11$ adódik, ami könnyen ellenőrizhető módon tényleg megoldás lesz.

---

2. feladat: Az ABC háromszögben $AC = BC$ és $ABC\angle = BAC\angle = 40°$. A BAC szög szögfelezője a BC oldalt a D pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $AD + DC = AB$!

Szabó Magda (Szabadka)

2. feladat I. megoldása: Vegyük fel az AB szakaszon azokat az E és F pontokat, melyekre $ADE\angle = 60°$ és $BDF\angle = 40°$.



A négy pont A, E, F, B sorrendben fog elhelyezkedni a szakaszon, hiszen az ADE és BDF szögek összege kisebb, mint az ADB szög, ami 120° nagyságú (C-nél a háromszögben nyilván 100°-os szög van). Így az ADC és AED háromszögek hasonlók lesznek, mert minden szögük megegyezik. Megegyezik azonban az AD oldaluk is, így a két háromszög egybevágó. A szögek kiszámításával belátható továbbá, hogy az EFD, a DAF és a DFB háromszögek mind egyenlő szárúak. Ebből az következik, hogy

$$DC = DE = DF = FB, \ AD = AF$$

Ez pedig továbbgondolva:

$$AD + DC = AF + FB = AB,$$

és éppen ezt akartuk bizonyítani.

---

3. feladat: Az $ABCD$ érintőnégyszög (A és C átellenes csúcsok) beírt körének középpontja O, sugara r. Az ABO és CDO háromszögek köré írt körének sugara r_1 illetve r_2. Bizonyítsuk be, hogy r nem lehet nagyobb r_1-nél is és r_2-nél is.

Kántor Sándor (Debrecen)

3. feladat I. megoldása: Jelöljük a négyszög csúcsainál lévő szögek felét α-val, β-val, γ-val, δ-val! A négy szög összege 180°, így $\alpha + \beta$ és $\gamma + \delta$ közül valamelyik legfeljebb 90° nagyságú. Ez azt jelenti, hogy az ABO és CDO háromszögek közül az egyik derékszögű vagy tompaszögű. Ez azt jelenti, hogy ennek a háromszögnek az O csúcsból induló magassága (ennek a hossza r) legfeljebb akkora, mint a háromszög köré írt kör sugara. Tehát r nem lesz nagyobb r_1 és r_2 közül valamelyikénél, és épp ezt kellett belátnunk.

---

4. feladat: A valós számok halmazában értelmezett $\circ$ műveletre (amelynél bármely x, y valós szám esetén $(x \circ y)$ is valós szám) minden x, y, z valós szám esetén teljesülnek a következő tulajdonságok:

$$x \circ y = y \circ x,$$

$$(x \circ y)z = (xz) \circ (yz)$$

$$(x \circ y) + z = (x + z) \circ (y + z).$$

Mennyi $1999 \circ 2000$?

Kántor Sándorné (Debrecen)

4. feladat I. megoldása: A harmadik feltétel miatt $(x \circ y) + (-x-y) = (-y) \circ (-x)$. Továbbá az első és második feltétel együttes alkalmazásával $(-y) \circ (-x) = -(x \circ y)$. Összességében tehát $(x \circ y) + (-x-y) = -(x \circ y)$. Ez pedig átrendezve $x \circ y = \frac{x+y}{2}$-t jelenti. Eszerint pedig $1999 \circ 2000 = 1999,5$.

---

5. feladat: Egy téglalap oldalai 37 és 54 egységnyiek. Vegyünk fel a téglalapon (a belsejében vagy kerületén) 1999 pontot. Bizonyítsuk be, hogy a pontok bármilyen választása esetén lesz közöttük legalább három, amely lefedhető egy $\frac{9}{4}$ átmérőjű körlappal.

Benedek Ilona (Vác)

5. feladat I. megoldása: Osszuk fel a téglalap 54 hosszú oldalait 27, a 37 hosszúakat 37 egyenlő részre, és az osztópontokon át húzzunk merőlegeseket az oldalakra. A kapott egyenesek a téglalapot 999 db 2x1-es téglalapra bontják. A 999 téglalap között lesz olyan, amelybe a kiválaszott pontok közül legalább három esik a skatulyaelv alapján (értjük ez alatt azt is, hogy esetleg a téglalap kerületén vannak a pontok). Ennek a téglalapnak az átlója $\sqrt{5}$ hosszúságú lesz, és mivel $\sqrt{5} < \frac{9}{4}$, azért az egész téglalap (így nyilván a benne lévő pontok is) lefedhető egy $\frac{9}{4}$ átmérőjű körlappal.

---

6. feladat: Adottak az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valós számok úgy, hogy $1 \leq x_i \leq n^2$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ és $1 \leq i < j \leq n$ esetén $x_j - x_i \geq j + i$. Határozzuk meg az $x_1, x_2, \ldots x_n$ számokat!

Bencze Mihály (Brassó)

6. feladat I. megoldása: A feltételi egyenlőtlenséget speciális esetekre fölírva:

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &\geq 2 + 1 \\ x_3 - x_2 &\geq 3 + 2 \\ &\vdots \\ x_n - x_{n-1} &\geq n + n - 1 \end{aligned}$$

A megfelelő oldalakat összeadva azt kapjuk, hogy $x_n - x_1 \geq n^2 - 1$. Az első feltételünk miatt ez csak $x_n = n^2$ és $x_1 = 1$ esetén teljesülhet.

Írjuk fel továbbá minden $1 < k < n$-re a következő két egyenlőtlenségrendszert:

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &\geq 2 + 1 \\ &\vdots \\ x_k - x_{k-1} &\geq k + k - 1 \end{aligned}$$

Ebből adódik, hogy $x_k \geq k^2$, továbbá

$$x_{k+1} - x_k \geq k + 1 + k$$
$$\vdots$$
$$x_n - x_{n-1} \geq n + n - 1,$$

ezeket összeadva pedig $x_n - x_k \geq n^2 - k^2$, ekkor viszont $x_n = n^2$ miatt $x_k \leq k^2$-et kapjuk, ezt pedig összevetve az előzővel $x_k = k^2$ adódik minden 1 és n közé eső k-ra.