VII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Szabadka, 1998. ápr. 23-26.

12. osztály

1. feladat: Melyek azok a valós számokon értelmezett, valós értékű f függvények, amelyek minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén kielégítik az $x \cdot f(y) = y \cdot f(x)$ egyenletet?

Árokszállási Tibor (Paks)

1. feladat I. megoldása: A konstans 0 függvény láthatóan megfelelő lesz. Így elég csak az ettől különböző megoldásokat keresnünk. Keressünk egy rögzített 0-tól különböző y-t! Ekkor $f(y)$ nem lehet 0, mivel másképp minden x-re $f(x) = 0$ lenne igaz. Jelöljük az $\frac{f(y)}{y}$ hányadost c-vel, ekkor a függvény csak $f(x) = cx$ alakú lehet, az ilyen függvényekre pedig az egyenlet nyilvánvalóan teljesül, hiszen $cxy = cxy$ formájú lesz.

---

2. feladat: Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{6z} &= \frac{1}{\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}} \\ x + y^2 + z^3 &= 14 \end{aligned}$$

Neubauer Ferenc (Munkács)

2. feladat I. megoldása: Alakítsuk át az első egyenletet ekvivalens módon!

$$\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{6z}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}\right) = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{y}{6x} + \frac{z}{12x} + \frac{x}{6y} + \frac{1}{9} + \frac{z}{18y} + \frac{x}{12z} + \frac{y}{18z} + \frac{1}{36} = 1$$

$$9 + \frac{6y}{x} + \frac{3z}{x} + \frac{6x}{y} + 4 + \frac{2z}{y} + \frac{3x}{z} + \frac{2y}{z} + 36 = 1$$

$$6\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 3\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + 2\left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right) = 22$$

A bal oldal viszont az ismert $a + \frac{1}{a} \geq 2$ egyenlőtlenség miatt, legalább 22, tehát az egyenlőtlenségben mindenhol egyenlőségnek kell fennállnia, ami $x = y = z$-t jelenti. A második egyenlet ekkor $x^3 + x^2 + x - 14 = 0$. Ennek az egyik gyöke 2, vagyis a gyöktényező kiemelhető:

$$x^3 + x^2 + x - 14 = (x - 2)(x^2 + 3x + 7)$$

A második tényezőnek nincs valós gyöke, ami azt jelenti, hogy az egyenletrendszernek csak $x = y = z = 2$ a megoldása, és ez láthatóan tényleg jó is lesz.

---

3. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha az $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet összes gyöke valós szám, akkor $a^2 \geq 3b$ (a, b, c adott valós számok)!

Oláh György (Révkomárom)

3. feladat I. megoldása: Jelöljük a gyököket x_1-gyel, x_2-vel, x_3-mal! Ekkor

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

vagyis $x_1+x_2+x_3=a$ és $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b$. A kívánt egyenlőtlenség:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)\geq 3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1).$$

Ez pedig átrendezve azt jelenti, hogy $x_1^2+x_2^2+x_3^2\geq x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ Ezt az egyenlőtlenséget pedig 2-vel szorozva és átrendezve

$$(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2\geq 0,$$

ami pedig mindig teljesül, és egyenlőség csak $x_1=x_2=x_3$ esetén állhat fenn. Tehát valóban igaz lesz a feladat állítása.

---

4. feladat: Egy szabályos négyoldalú gúla beírt gömbjének sugara r, köré írható gömbjének sugara R. Igazoljuk, hogy

$$\frac{R}{r}\geq\sqrt{2}+1.$$

Szabó Magda (Szabadka)

4. feladat I. megoldása: Jelöljük a gúla alapélének felét a-val, magasságát pedig m-mel! Ekkor a gúla egyik főköre, amely átmegy az alaplap két átellenes csúcsán és a gúla csúcsán, egy $2a\sqrt{2}$ alapú, m magasságú egyenlő szárú háromszög köré van írva. A Pitagorasz-tételt alkalmazva arra háromszögre, amelyet a kör középpontja alkot az egyik csúccsal és a magasság talppontjával:

$$\begin{aligned} R^2 &= (m-R)^2+2a^2\\ R &= \frac{m^2+2a^2}{2m}\end{aligned}$$

A beírt gömb főkörét egy olyan háromszögbe írhatjuk, amelynek két csúcsa az alaplap két átellenes oldalfelezője, a harmadik pedig a gúla csúcsa. Ennek alapja $2a$, magassága pedig m. A középpontból az egyik szárhoz húzott sugár talppontja a középponttal és a gúla csúcsával hasonló háromszöget alkot ahhoz, mint amit akkor kapunk, ha a magasság talppontját és a szár két végpontját vesszük (megegyezik a két háromszögben a derékszög, és a gúla csúcsánál kialakuló szög is). Ez azt jelenti, hogy a megfelelő oldalak arányát felírva

$$\frac{m-r}{r}=\frac{\sqrt{a^2+m^2}}{a}$$

Ebből pedig következik, hogy

$$\frac{1}{r}=\frac{\sqrt{a^2+m^2}+a}{a\cdot m}$$

Ekkor pedig a $k=\frac{R}{r}$ jelölés bevezetésével

$$k=\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{a}{m}\right)^2\right)\left(\sqrt{1+\left(\frac{m}{a}\right)^2}+1\right)$$

Ha most az $\frac{m}{a}$ hányadost x-szel jelöljük, akkor a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{x^2}{4}+(1-k-k^2)x+1+2k=0$$

Ennek az egyenletnek akkor van valós gyöke (akkor létezik megfelelő sugáraránnyal szabályos négyoldalú gúla), ha a diszkrimináns nemnegatív, tehát ha

$$k^2(k^2-2k-1)\geq 0,$$

ami $k > 1$ miatt pontosan akkor teljesül, ha $k^2 - 2k - 1 \geq 0$, tehát $k \geq \sqrt{2} + 1$, és épp ezt kellett bizonyítanunk.

---

5. feladat: Az (a_n) valós számsorozatot a következőképpen értelmezzük:

$$a_1 = a_2 = 2 \text{ és } a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}, \text{ ha } n \geq 2.$$

Igazoljuk, hogy bármely $k \geq 1$ esetén $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$

Kovács Béla (Szatmárnémeti)

5. feladat I. megoldása: Egyszerű számolással kaphatjuk, hogy $\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}-1} = \frac{a_n^2}{a_n-1}$. Ebből átalakítva

$$a_n = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} - 1} \cdot \frac{a_n - 1}{a_n},$$

valamint

$$a_n = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} - 1} - \frac{a - n}{a_n - 1}$$

adódnak. Az első egyenlőtlenséget véve $k = 2, 3, \ldots, k$-ra, majd a megfelelő oldalakat összeszorozva és beszorozva $a_1 = \frac{a_2}{a_2-1}$-gyel azt kapjuk, hogy

$$a_1 a_2 \ldots a_k = \frac{a_{k+1}}{a_{k+1} - 1}$$

A második egyenlőtlenséget véve $2, 3, \ldots, k$-ra, majd a megfelelő oldalakat összeadva és hozzáadva $a_1 = \frac{a_1}{a_1-1}$-et, azt kapjuk, hogy

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = \frac{a_{k+1}}{a_{k+1} - 1}$$

A két kapott összefüggés együttesen pedig már igazolja a feladat állítását.

---

6. feladat: Oldjuk meg a pozitív valós számok halmazán az

$$\begin{aligned} x + y + z &= xyz \\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

egyenletrendszert!

Bencze Mihály (Brassó)

6. feladat I. megoldása: Tekintve, hogy a tangensfüggvény szigorúan monoton a $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumon, továbbá 0-ban 0, és határértéke $\frac{\pi}{2}$-ben balról végtelen, azért a pozitív x, y, z-khez vannak olyan α, β, γ szögek 0 és $\frac{\pi}{2}$ között, melyekre $\operatorname{tg} \alpha = x$, $\operatorname{tg} \beta = y$, $\operatorname{tg} \gamma = z$. Ekkora szögekre érvényes a következő összefüggés: $\sin \phi = \frac{\operatorname{tg} \phi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi}}$. Így az egyenletrendszer

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma &= \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \\ \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Ismert addíciós összefüggés alapján

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}$$

Az első egyenlet alapján így $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=0$, ami azt jelenti, hogy $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$, ahol k egész szám. Tekintve, hogy mindhárom szög 0 és $\frac{\pi}{2}$ közé esik, így az összegük 0 és $\frac{3\pi}{2}$ közé fog esni, ez azt jelenti, hogy szükségképpen $k=1$, tehát $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Ekkor viszont α, β, γ egy háromszög belső szögei, ezekre pedig ismert a

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

egyenlőtlenség, amelyben egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos, ez pedig az eredeti egyenletünkben $x=y=z=\sqrt{3}$-at jelenti, amely könnyen láthatóan valóban megoldás is lesz.