VII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Szabadka, 1998. ápr. 23-26.

11. osztály

1. feladat: Adottak az $a_1, a_2, \ldots, a_{37}, b_1, b_2, \ldots, b_{37}, c_1, c_2, \ldots, c_{37}$ egész számok. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan i, j, k egész szám, hogy $i \neq j, i \neq k, j \neq k, 1 \leq i, j, k \leq 37$, továbbá

$$\frac{a_i + a_j + a_k}{3}, \frac{b_i + b_j + b_k}{3}, \frac{c_i + c_j + c_k}{3}$$

egészek!

Kiss Sándor (Nyíregyháza)

2. feladat: Igazoljuk, hogy bármely háromszögben érvényes a

$$\frac{bc}{\varrho_a^2} + \frac{ac}{\varrho_b^2} + \frac{ab}{\varrho_c^2} \geq \frac{abc}{2\varrho T}$$

egyenlőtlenség, ahol a, b, c a háromszög oldalai, $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ a megfelelő oldalakhoz hozzáírt körök sugarai, ϱ a háromszögbe írható kör sugara, T pedig a háromszög területe.

Oláh György (Révkomárom)

3. feladat: Adottak az $a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d$ pozitív egész számok ($n > 1$, egész). Igazoljuk, hogy ha az adott számok egyike sem osztható n-nel, akkor n és d nem relatív prímek!

Zolnai Irén (Újvidék)

4. feladat: Egy derékszögű koordináta-rendszerben úgy helyeztünk el végtelen sok téglalapot, hogy mindegyiknek egyik oldala az x, egy másik oldala pedig az y tengelyre illeszkedjék. A téglalapok origóval szemközti csúcsának koordinátái egész számok. Mutassuk meg, hogy van a téglalapok között két olyan, amelyek közül egyik tartalmazza a másikat!

Bogdán Zoltán (Cegléd)

5. feladat: Legyenek $k \geq 1$, $n \geq 2$ adott egész számok. Számítsuk ki

$$\left(\sqrt[n]{k} - \sqrt[n]{k+1} + \sqrt[n]{k+2}\right)^n$$

egész részét (egy x szám egész része az a legnagyobb egész szám, amely nem nagyobb x-nél)!

Bencze Mihály (Brassó)

6. feladat: Adottak a $2, 3, 4, \ldots, 1998, 1999$ számok és a belőlük képezett összes különböző tényezőkből álló két, három, …,1998-tényezős szorzat (összesen $2^{1998} - 1$ szám). Mutassuk meg, hogy ezen számok reciprokainak összege egész szám.

Katz Sándor (Bonyhád)