VII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Szabadka, 1998. ápr. 23-26.

11. osztály

1. feladat: Adottak az $a_1, a_2, \ldots, a_{37}, b_1, b_2, \ldots, b_{37}, c_1, c_2, \ldots, c_{37}$ egész számok. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan i, j, k egész szám, hogy $i \neq j, i \neq k, j \neq k, 1 \leq i, j, k \leq 37$, továbbá

$$\frac{a_i + a_j + a_k}{3}, \frac{b_i + b_j + b_k}{3}, \frac{c_i + c_j + c_k}{3}$$

egészek!

Kiss Sándor (Nyíregyháza)

1. feladat I. megoldása: Többszörösen alkalmazzuk a skatulyelvet. Az a_i-k száma 37, tehát lesz 13 olyan, amely ugyanazt a maradékot adja 3-mal osztva. Vegyük az ugyanezen indexekhez tartozó b_i-ket! Ezek között lesz legalább 5 olyan, amelyek 3-mal osztva ugyanazt adják maradékul. Vegyük az ehhez az 5 indexhez tartozó c-ket, ezek között lesz legalább 3 olyan, amelynek ugyanaz lesz a 3-as maradéka. Az ehhez a három indexhez tartozó a_i-kre, b_i-kre és c_i-kre is igaz lesz, hogy ugyanakkora 3-as maradékkal rendelkeznek, tehát összegük biztosan osztható 3-mal, vagyis ez a három index a feladat megoldását adja.

---

2. feladat: Igazoljuk, hogy bármely háromszögben érvényes a

$$\frac{bc}{\varrho_a^2} + \frac{ac}{\varrho_b^2} + \frac{ab}{\varrho_c^2} \geq \frac{abc}{2\varrho T}$$

egyenlőtlenség, ahol a, b, c a háromszög oldalai, $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ a megfelelő oldalakhoz hozzáírt körök sugarai, ϱ a háromszögbe írható kör sugara, T pedig a háromszög területe.

Oláh György (Révkomárom)

2. feladat I. megoldása: Osszunk le az abc pozitív kifejezéssel!

$$\frac{1}{a\varrho_a^2} + \frac{1}{b\varrho_b^2} + \frac{1}{c\varrho_c^2} \geq \frac{1}{2\varrho T}$$

Használjuk most fel az ismert

$$\varrho_a = \frac{T}{s-a}, \ \varrho_b = \frac{T}{s-b}, \ \varrho_c = \frac{T}{s-c}, \ \varrho = \frac{T}{s}$$

összefüggéseket, helyettesítsük be őket, és szorozzunk be T^2-tel!

$$\frac{(s-a)^2}{a} + \frac{(s-b)^2}{b} + \frac{(s-c)^2}{c} \geq \frac{s}{2}$$

Itt pedig a műveleteket elvégezve a következőt kapjuk:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

Ez pedig azért igaz, mivel $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$, $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$. Egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $a = b = c$.

---

3. feladat: Adottak az $a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d$ pozitív egész számok ($n > 1$, egész). Igazoljuk, hogy ha az adott számok egyike sem osztható n-nel, akkor n és d nem relatív prímek!

Zolnai Irén (Újvidék)

3. feladat I. megoldása: Ha valóban nincs olyan szám, amely osztható n-nel, akkor az n darab szám közül biztosan van kettő, amelyeknek megegyezik az n-es maradéka, hiszen n darab számunk van, amelyek csak $n-1$-féle maradékot vehetnek föl. Legyen ez a két szám $a + id$ és $a + jd$ ($i > j$). Ekkor a két szám különbsége osztható lesz d-vel, tehát $(i - j)d$ osztható lesz n-nel, mivel pedig $i - j < n$, azért d-nek kell közös prímtényezőt tartalmaznia n-nel, tehát d és n legnagyobb közös osztója egész biztosan nagyobb lesz, mint 1.

---

4. feladat: Egy derékszögű koordináta-rendszerben úgy helyeztünk el végtelen sok téglalapot, hogy mindegyiknek egyik oldala az x, egy másik oldala pedig az y tengelyre illeszkedjék. A téglalapok origóval szemközti csúcsának koordinátái egész számok. Mutassuk meg, hogy van a téglalapok között két olyan, amelyek közül egyik tartalmazza a másikat!

Bogdán Zoltán (Cegléd)

4. feladat I. megoldása: Az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy az első síknegyedben fölvettünk végtelen sok téglalapot (a végtelen sok téglalapból valamelyik síknegyedbe mindenképpen jutnia kell végtelen soknak). Legyen az egyik ilyen téglalap csúcspontjának koordinátája $(a; b)$.

Bármely $i, j > 0$-ra igaz az, hogy legfeljebb 1 olyan téglalap lehet, amely csúcsának első koordinátája pontosan i, illetve olyan is, amelynek második koordinátája pontosan j. Ha lenne két ilyen ugyanis, akkor azok közül valamelyik biztosan tartalmazná a másikat.

Ez viszont azt jelenti, hogy legfeljebb $a + b$ olyan téglalap lehet, amely csúcsának első koordinátája legfeljebb a, vagy második koordinátája legfeljebb b. Mivel pedig a síknegyedben végtelen sok téglalap van, azért lesz olyan téglalap, amely nem teljesíti ezt a feltételt, tehát csúcsának első koordinátája nagyobb, mint a, a második pedig nagyobb, mint b. Ekkor pedig ez a téglalap tartalmazni fogja az eredeti $(a; b)$ csúcsú téglalapunkat. Ezzel pedig beláttuk, hogy mindenképp van két olyan téglalap, melyek közül az egyik tartalmazza a másikat.

---

5. feladat: Legyenek $k \geq 1$, $n \geq 2$ adott egész számok. Számítsuk ki

$$\left(\sqrt[n]{k} - \sqrt[n]{k+1} + \sqrt[n]{k+2}\right)^n$$

egész részét (egy x szám egész része az a legnagyobb egész szám, amely nem nagyobb x-nél)!

Bencze Mihály (Brassó)

5. feladat I. megoldása: A kifejezés alakjából az a sejtés fogalmazódhat meg, hogy a kérdéses egészrész k lesz. Ehhez elegendő lenne, ha belátnánk, hogy

$$k < \left(\sqrt[n]{k} - \sqrt[n]{k+1} + \sqrt[n]{k+2}\right)^n < k + 1$$

A két egyenlőtlenség közül az első nyilvánvaló, hiszen $\sqrt[n]{k+1} < \sqrt[n]{k+2}$, így a zárójelen belül $\sqrt[n]{k}$-nál nagyobb szám áll.

A második egyenlőtlenséghez elegendő, hogy

$$\sqrt[n]{k+2} - \sqrt[n]{k+1} < \sqrt[n]{k+1} - \sqrt[n]{k}$$

Felhasználva ez után az $a - b = \frac{a^n - b^n}{a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}}$ azonosságot, az egyenlőtlenség

$$\frac{1}{\left(\sqrt[n]{k+2}\right)^{n-1} + \left(\sqrt[n]{k+2}\right)^{n-2}\sqrt[n]{k+1} + \ldots + \left(\sqrt[n]{k+1}\right)^{n-1}} <$$

$$< \frac{1}{\left(\sqrt[n]{k+1}\right)^{n-1} + \left(\sqrt[n]{k+1}\right)^{n-2}\sqrt[n]{k} + \ldots + \left(\sqrt[n]{k}\right)^{n-2}}$$

formára hozható, ami pedig nyilvánvalóan igaz, hiszen a bal oldal nevezőjében minden tag határozottan nagyobb, mint a jobb oldal nevezőjében a megfelelő tag.

---

6. feladat: Adottak a $2, 3, 4, \ldots, 1998, 1999$ számok és a belőlük képezett összes különböző tényezőkből álló két, három, $\ldots$,1998-tényezős szorzat (összesen $2^{1998} - 1$ szám). Mutassuk meg, hogy ezen számok reciprokainak összege egész szám.

Katz Sándor (Bonyhád)

6. feladat I. megoldása: Bizonyítsuk teljes indukcióval, hogy ha $n+1$ a legnagyobb szám, akkor a reciprokösszeg $\frac{n-1}{2}$! $n = 1$ és $n = 2$ esetén igaz lesz az állítás. Tegyük fel, hogy $n-1$-re is igaz, és ebből bizonyítsuk be n-re.

Az $n-1$-re szereplő számokból összeállított szorzatok itt is fel fognak lépni, hozzá kell venni mindegyikhez az $n+1$-szeresét, illetve magát az $n+1$-et. Így a reciprokösszeg

$$\frac{n-1}{2} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n+1) + n + 1}{2(n+1)} = \frac{n}{2}$$

A feladatban $n = 1998$ szerepel, ebben az esetben pedig az összeg 99, ami valóban egész szám.