VII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Szabadka, 1998. ápr. 23-26.

10. osztály

1. feladat: Oldjuk meg a pozitív egész számok körében a következő egyenletet:

$$\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}=a+b\sqrt{2}$$

Kórizs Júlia (Bácskatopolya)

1. feladat I. megoldása: Vegyük észre, hogy $9+4\sqrt{2}=(1+2\sqrt{2})^2$, és mivel $1+2\sqrt{2}$ pozitív, azért $\sqrt{9+4\sqrt{2}}=1+2\sqrt{2}$. Hasonló módon igaz lesz, hogy $\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}=1+\sqrt{2}$. Ez pedig azt jelenti, hogy

$$\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}=\sqrt{13+30+30\sqrt{2}}=5+3\sqrt{2},$$

ebből pedig $a=5$ és $b=3$ következik.

---

2. feladat: Igazoljuk, hogy ha n egész szám, akkor az

$$\frac{n^4+4n^2+3}{n^4+10n^2+16}$$

tört nem egyszerűsíthető!

Balázsi Borbála (Beregszász)

2. feladat I. megoldása: Bontsuk szorzattá a számlálót és a nevezőt is!

$$\frac{n^4+4n^2+3}{n^4+10n^2+16}=\frac{(n^2+1)(n^2+3)}{(n^2+2)(n^2+8)}$$

Mivel pedig n^2+2 relatív prím mind n^2+1-hez, mind n^2+3-hoz, azért a tört csak akkor lesz egyszerűsíthető, hogyha n^2+8-nak van közös valódi osztója a számláló valamelyik tényezőjével. Ha van ilyen, akkor ez osztója a különbségnek is, tehát vagy $n^2+8-(n^2+1)=7$ lehet, vagy pedig $n^2+8-(n^2+3)=5$ (hiszen mindkét szám prím). Minden lehetséges esetre megvizsgálva n^2+1 7-es maradékát azt kapjuk, hogy n^2+1 soha nem lesz 7-tel osztható, és hasonló módon kapjuk azt is, hogy n^2+3 soha nem lesz 5-tel osztható. Így tehát a lehetséges közös osztók biztosan nem lépnek föl, ami azt jelenti, hogy a tört valóban nem egyszerűsíthető.

---

3. feladat: Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész x,y,z számokból álló számhármast, amelyre teljesül a következő két egyenlet:

$$\begin{aligned} x^3+3y^3+z^5+z &= 1998 \\ y^2z &= x \end{aligned}$$

Oláh György (Révkomárom)

3. feladat I. megoldása: Helyettesítsünk be x helyébe az első egyenletben! Azt kapjuk, hogy $y^6z^3 + 3y^3 + z^5 + z = 1998$, ezt y^3-ban másodfokú egyenletként megoldva:

$$y^3 = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4z^3(z^5 + z - 1998)}}{2z^3}$$

Ebből (illetve már az eredeti első egyenletből is) következik, hogy z értéke legfeljebb 4 lehet, mivel $z > 4$ esetén $z^5 + z > 1998$, és így az első egyenlet nyilvánvalóan nem teljesülhet, továbbá a megoldóképletben a gyökjel alatt negatív szám áll. A megoldóképletbe a négy megmaradt értéket behelyettesítve csak $z = 3$ esetén kapunk y-ra pozitív egész értéket, ekkor $y = 2$ és $x = 12$, ez a számhármas pedig valóban teljesíti a feladatban szereplő egyenlőségeket.

---

4. feladat: Legyen d egy A kezdőpontú félegyenes és α egy olyan változó szög, amely 0° és 90° között minden értéket felvesz. A d félegyenesen úgy választjuk ki a B pontot, hogy $AB = \operatorname{tg}\alpha$ teljesüljön, és úgy szerkesztjük meg AB fölé az ABC háromszöget, hogy $BAC\angle = \alpha$, $AC = \sin\alpha$ teljesüljön. Mit írnak le a C pontok, ha α minden lehetséges értéket felvesz?

Kovács Béla (Szatmárnémeti)

4. feladat I. megoldása: Alkalmazzuk az ABC háromszögben az A csúcsnál a koszinusztételt!

$$BC^2 = \sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha - 2\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha = AB^2 - AC^2$$

(az oldalak hosszát behelyettesítve és felhasználva, hogy a kivonandó egyszerűsítések után $2\sin^2\alpha$). Ez azt jelenti, hogy az ABC háromszögnek C-nél derékszöge van. A C pont így mindig rajta van azon a Thalész-körön, amely egyik átmérőjének végpontja az A pont, a másik végpontja pedig az A-ban d-re állított merőleges és a BC egyenes metszéspontja, jelöljük ezt D-vel! $ADC\angle = \alpha$ nyilván igaz lesz, hiszen a DAC szög $90° - \alpha$ nagyságú. Ez azt jelenti, hogy $\frac{AC}{CD} = \frac{\sin\alpha}{CD} = \operatorname{tg}\alpha$, ez pedig azt jelenti, hogy $CD = \cos\alpha$, tehát $AD = \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = 1$. Így tehát C minden α-ra rajta van az AD félkörön. Nyilvánvaló továbbá, hogy a gondolatmenetünk megfordítható, tehát a félkör minden belső pontjára van megfelelő α és így ABC háromszög.

---

5. feladat: Egy háromszög oldalainak a, b, c mértékszámai egész számok és tudjuk, hogy az egyik magasság a másik két magasság összegével egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy $a^2 + b^2 + c^2$ négyzetszám.

Katz Sándor (Bonyhád)

5. feladat I. megoldása: Az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy $m_a = m_b + m_c$. Jelöljük t-vel a háromszög területét! Ekkor

$$\frac{2t}{a} = \frac{2t}{b} + \frac{2t}{c}$$

ami átrendezve azt jelenti, hogy

$$bc = ac + ab$$

Ebből pedig az következik, hogy

$$(b + c - a)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc - ac - ab = a^2 + b^2 + c^2,$$

tehát $a^2 + b^2 + c^2$ valóban négyzetszám lesz.

---

6. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$n^{4(x_1^2+x_2)} + n^{4(x_2^2+x_3)} + \ldots + n^{4(x_n^2+x_1)} = 1,$$

ahol $n \geq 2$ egész szám.

Bencze Mihály (Brassó)

6. feladat I. megoldása: Alkalmazzuk a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget!

$$
\begin{aligned}
1 = n^{4(x_1^2+x_2)} + n^{4(x_2^2+x_3)} + \ldots + n^{4(x_n^2+x_1)} &\geq n\left(\sqrt[n]{n^{4(x_1^2+x_2)+4(x_2^2+x_3)+\ldots+4(x_n^2+x_1)}}\right) = \\
&= n\left(\sqrt[n]{(n^4)^{(x_1^2+x_2)+(x_2^2+x_3)+\ldots+(x_n^2+x_1)}}\right) = \\
&= n\left(\sqrt[n]{(n^4)^{\left(x_1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(x_2+\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(x_n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{n}{4}}}\right) \geq \\
&\geq n\left(\sqrt[n]{(n^4)^{-\frac{n}{4}}}\right) = 1
\end{aligned}
$$

Tehát mindenhol egyenlőségnek kell lennie, ami az utolsó becslést figyelembe véve csakis akkor teljesülhet, ha bármely i-re $x_i = -\frac{1}{2}$. Ekkor pedig láthatóan minden becslésben egyenlőség teljesül, és az eredeti egyenletünk $n \cdot \frac{1}{n} = 1$ formába alakul, ami valóban igaz.