VII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Szabadka, 1998. ápr. 23-26.

9. osztály

1. feladat: Ismeretes, hogy

$$35! = 10333147966386144929ab66513375232000000000.$$

Milyen számjegyek állnak az a és b helyén?

Szabó Magda (Szabadka)

2. feladat: Az AEF hegyesszögű háromszög ED és FB magasságvonalai a C pontban metszik egymást. Az M, N, P, Q pontok rendre az FC, EC, AE és AF szakaszok felezőpontjai. Bizonyítsuk be, hogy az $MNPQ$ négyszög téglalap!

Kórizs Júlia (Bácskatopolya)

3. feladat: Határozzuk meg a következő egyenlőtlenségrendszer összes megoldását a pozitív valós számok halmazán:

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{x_2} &\le 2 \\ x_2 + \frac{1}{x_3} &\le 2 \\ &\vdots \\ x_{1997} + \frac{1}{x_{1998}} &\le 2 \\ x_{1998} + \frac{1}{x_1} &\le 2 \end{aligned}$$

Oláh György (Révkomárom)

4. feladat: Az $A_1A_2 \ldots A_n$ és $B_1B_2 \ldots B_n$ szabályos n-szögek úgy metszik egymást, hogy az A_1A_2 és B_nB_1 oldalak közös pontja K_1, az A_1A_2 és B_1B_2 közös pontja K_2, az A_2A_3 és B_1B_2 közös pontja K_3, és így tovább, A_nA_1 és $B_{n-1}B_n$ közös pontja K_{2n-1}, A_nA_1 és B_nB_1 közös pontja K_{2n}. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{A_1K_1}{B_1K_1} \cdot \frac{B_1K_2}{A_2K_2} \cdot \frac{A_2K_3}{B_2K_3} \cdot \frac{B_2K_4}{A_3K_4} \cdot \ldots \cdot \frac{A_nK_{2n-1}}{B_nK_{2n-1}} \cdot \frac{B_nK_{2n}}{A_1K_{2n}} = 1$$

(A K_i pontok az oldalak belső pontjai, $i = 1, 2, \ldots, 2n$.)

Bencze Mihály (Brassó)

5. feladat: Egy négyzet alakú, 1998×1998 egybevágó, négyzet alakú mezőből álló táblán 1997 mezőt már befestettek. Befesthető minden olyan, eddig még be nem festett mező, amelynek legalább két szomszédja már be van festve. Két mezőt akkor tekintünk szomszédosnak, ha van közös oldaluk. Bizonyítsuk be, hogy az egész táblát nem lehet befesteni.

Balázsi Borbála (Beregszász)

6. feladat: Nevezzük "szépnek" az $a^2 + 2b^2$ alakú számokat, ahol a és b pozitív egész számokat jelöl. Bizonyítsuk be, hogy az így értelmezett "szép" számok közül akárhányat összeszorozva újra "szép" számot kapunk!

Kiss Sándor (Nyíregyháza)