VII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Szabadka, 1998. ápr. 23-26.

9. osztály

1. feladat: Ismeretes, hogy

$$35! = 10333147966386144929ab66513375232000000000.$$

Milyen számjegyek állnak az a és b helyén?

Szabó Magda (Szabadka)

1. feladat I. megoldása: Tudjuk, hogy 35! osztható 9-cel, így igaz ez a számjegyösszegre is. A meglévő számjegyek összeg 132, ebből pedig $a+b=3$ vagy $a+b=12$ következik. 35! osztható továbbbá 11-gyel, tehát igaz lesz ez a páros helyen álló számok összegének és a páratlan helyen álló számok összegének különbségére. Így $a+66-(b+66)=a-b$ osztható lesz 11-gyel, tehát $a-b=0$, amiből $a=b=6$ adódik.

---

2. feladat: Az AEF hegyesszögű háromszög ED és FB magasságvonalai a C pontban metszik egymást. Az M, N, P, Q pontok rendre az FC, EC, AE és AF szakaszok felezőpontjai. Bizonyítsuk be, hogy az $MNPQ$ négyszög téglalap!

Kórizs Júlia (Bácskatopolya)

2. feladat I. megoldása: A PQ szakasz középvonala az AFE háromszögnek, hasonlóképp MN a CFE háromszögnek. Ez azt jelenti, hogy $PQ \parallel MN$ és $PQ = MN$. Mivel pedig PN az ACE, QM pedig az ACF háromszögben középvonal, azért $PN \parallel QM$ és $PN = QM$. Ez azt jelenti, hogy az $MNQP$ négyszög biztosan paralelogramma. Mivel azonban az AC és EF szakaszok merőlegesek, azért ugyanez fog teljesülni az MN és PN szakaszokra. Így az $MNPQ$ paralelogrammának van egy derékszöge, tehát biztosan téglalap lesz.

---

3. feladat: Határozzuk meg a következő egyenlőtlenségrendszer összes megoldását a pozitív valós számok halmazán:

$$\begin{aligned}
x_1 + \frac{1}{x_2} &\leq 2 \\
x_2 + \frac{1}{x_3} &\leq 2 \\
&\vdots \\
x_{1997} + \frac{1}{x_{1998}} &\leq 2 \\
x_{1998} + \frac{1}{x_1} &\leq 2
\end{aligned}$$

Oláh György (Révkomárom)

3. feladat I. megoldása: Adjuk össze az egyenlőtlenségek megfelelő oldalait és csoportosítsunk:

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + \ldots + \left(x_{1998} + \frac{1}{x_{1998}}\right) \leq 1998 \cdot 2$$

Az összeadásban a tagok ismert egyenlőtlenség szerint mind legalább 2 nagyságúak, tehát az egyenlőtlenség csak akkor teljesülhet (mégpedig az egyenlőség esetében), ha $x_1 = x_2 = \ldots = x_{1998}$. Ekkor pedig valóban megoldást kapunk.

---

4. feladat: Az $A_1A_2\ldots A_n$ és $B_1B_2\ldots B_n$ szabályos n-szögek úgy metszik egymást, hogy az A_1A_2 és B_nB_1 oldalak közös pontja K_1, az A_1A_2 és B_1B_2 közös pontja K_2, az A_2A_3 és B_1B_2 közös pontja K_3, és így tovább, A_nA_1 és $B_{n-1}B_n$ közös pontja K_{2n-1}, A_nA_1 és B_nB_1 közös pontja K_{2n}. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{A_1K_1}{B_1K_1}\cdot\frac{B_1K_2}{A_2K_2}\cdot\frac{A_2K_3}{B_2K_3}\cdot\frac{B_2K_4}{A_3K_4}\cdot\ldots\cdot\frac{A_nK_{2n-1}}{B_nK_{2n-1}}\cdot\frac{B_nK_{2n}}{A_1K_{2n}}=1$$

(A K_i pontok az oldalak belső pontjai, $i = 1, 2, \ldots, 2n$.)

Bencze Mihály (Brassó)

4. feladat I. megoldása: Mind a két sokszög szabályos, ezért belső szögeik egyenlők. A metszéspontokkal alkotott bármely két szomszédos háromszög így hasonló egymáshoz, hiszen megegyezik az egyik sokszögcsúcsnál lévő szögük, valamint a közös csúcsnál lévő szögeik megegyeznek. Így

$$A_1K_1K_{2n}\triangle \sim B_1K_1K_2\triangle,\ A_2K_2K_3\triangle \sim B_2K_3K_4\triangle,\ldots, A_nK_{2n-1}K_{2n-2}\triangle \sim B_nK_{2n-1}K_{2n}\triangle$$

Ez pedig azt jelenti, hogy

$$\frac{A_1K_1}{B_1K_1}=\frac{A_1K_{2n}}{B_1K_2},\ \frac{A_2K_3}{B_2K_3}=\frac{A_2K_2}{B_2K_4},\ldots,\frac{A_nK_{2n-1}}{B_nK_{2n-1}}=\frac{A_nK_{2n-2}}{B_nK_{2n}}=1$$

Ez viszont azt jelenti, hogy a feladatban szereplő szorzatban a páratlan helyen lévő tényezők szorzata megegyezik a páros helyen lévő tényezők szorzatának reciprokával, tehát összességében a szorzat értéke valóban 1 lesz.

---

5. feladat: Egy négyzet alakú, 1998×1998 egybevágó, négyzet alakú mezőből álló táblán 1997 mezőt már befestettek. Befesthető minden olyan, eddig még be nem festett mező, amelynek legalább két szomszédja már be van festve. Két mezőt akkor tekintünk szomszédosnak, ha van közös oldaluk. Bizonyítsuk be, hogy az egész táblát nem lehet befesteni.

Balázsi Borbála (Beregszász)

5. feladat I. megoldása: Legyen az egység egy mező oldala! Ekkor a befestett részek összesített külső kerülete nyilvánvalóan legfeljebb $4\cdot 1997$ egység. Mikor befestünk egy mezőt, ez a szám vagy nem változik (ha két befestett szomszédja van a mezőnek), vagy 2-vel csökken (ha három szomszédja volt), vagy pedig 4-gyel csökken (ha négy szomszédja volt). Így az összesített kerület soha nem nőhet, viszont teljesen befestett táblánál $4\cdot 1998$ lenne, ami azt jelenti, hogy nem festhetjük be az egész táblát.

---

6. feladat: Nevezzük "szépnek" az $a^2 + 2b^2$ alakú számokat, ahol a és b pozitív egész számokat jelöl. Bizonyítsuk be, hogy az így értelmezett "szép" számok közül akárhányat összeszorozva újra "szép" számot kapunk!

Kiss Sándor (Nyíregyháza)

6. feladat I. megoldása: Szorozzuk össze az $a^2 + 2b^2$ és $c^2 + 2d^2$ szép számokat!

$$\begin{aligned}(a^2+2b^2)(c^2+2d^2) &= (a^2c^2+4b^2d^2)+(2b^2c^2+2a^2d^2) =\\ &= (a^2c^2-4abcd+4b^2d^2)+(2b^2c^2+4abcd+2a^2d^2) =\\ &= (ac+2bd)^2+2(ad-bc)^2,\end{aligned}$$

így a szorzat is szép szám lesz. Ez pedig azt jelenti, hogy akárhány szép számot szorzunk is össze, eredményül mindig szép számot kapunk.