VI. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Kaposvár, 1997. ápr. 2-6.

12. osztály

1. feladat: Az $x > 0$ valós számra $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$ teljesül. Mutassuk meg, hogy $x^5 + \frac{1}{x^5}$ is egész szám.

Róka Sándor (Nyíregyháza)

2. feladat: Legyen f a pozitív egész számokon értelmezett függvény, értékei nemnegatív egészek. Az f minden pozitív egész x, y esetén kielégíti a következő feltételeket:

1) $f(xy) = f(x) + f(y)$

2) $f(10x + 3) = 0$

3) $f(10) = 0$

Adjuk meg a feltételeket kielégítő függvényeket!

Szabó Magda (Szabadka)

3. feladat: Bizonyítandó, hogy $x^n y^n + 1$ ($n \geq 1$ pozitív egész) nem állítható elő két olyan polinom szorzataként, amelyek közül az egyik csak az x-et, a másik csak az y-t tartalmazza!

Oláh György (Révkomárom)

4. feladat: Az ABC háromszög oldalai a, b, c, az a oldallal szemközti szög α. Igazoljuk, hogy ha

1) α hegyesszög, akkor $\sin\frac{\alpha}{2} \geq \frac{a}{\sqrt{2(b^2+c^2)}}$

2) α hegyesszög, akkor $\frac{a}{\sqrt{2(b^2+c^2)}} \leq \sin\frac{\alpha}{2} \leq \frac{a}{b+c}$

Bencze Mihály (Brassó)

5. feladat: Állapítsuk meg az

$$\frac{r_a^2 + r_b^2 + r_c^2}{s^2}$$

tört minimumát, ahol r_a, r_b, r_c a háromszög a, b, c oldalához hozzáírt körök sugara, s pedig a háromszög kerületének fele!

Kubatov Antal (Kaposvár)

6. feladat: Adott az

$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + \frac{2}{n+1}$$

rekurziót teljesítő sorozat, ahol $1{,}5 \leq u_1 \leq 2$. Igazoljuk, hogy $1 < u_n < 1 + \frac{1}{n-1}$, ha $n \geq 2$

András Szilárd (Kolozsvár)