VI. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Kaposvár, 1997. ápr. 2-6.

12. osztály

1. feladat: Az $x > 0$ valós számra $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$ teljesül. Mutassuk meg, hogy $x^5 + \frac{1}{x^5}$ is egész szám.

Róka Sándor (Nyíregyháza)

1. feladat I. megoldása: Végezzünk algebrai átalakításokat! $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2 = 9$. Mivel tudjuk, hogy $x > 0$, és $x + \frac{1}{x} = 3$, azért

$$27 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} + 9$$

Ez azt jelenti, hogy $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$. Ennek a két egyenlőségnek az ismeretében már kapjuk a következőt:

$$126 = 7 \cdot 18 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = x^5 + \frac{1}{x^5} + x + \frac{1}{x} + x^5 + \frac{1}{x^5} + 3,$$

ami pedig azt jelenti, hogy $x^5 + \frac{1}{x^5} = 123$. Ezzel a feladatot megoldottuk.

---

2. feladat: Legyen f a pozitív egész számokon értelmezett függvény, értékei nemnegatív egészek. Az f minden pozitív egész x, y esetén kielégíti a következő feltételeket:

$$\begin{aligned} &1) \quad f(xy) = f(x) + f(y) \\ &2) \quad f(10x + 3) = 0 \\ &3) \quad f(10) = 0 \end{aligned}$$

Adjuk meg a feltételeket kielégítő függvényeket!

Szabó Magda (Szabadka)

2. feladat I. megoldása: A feltételekből $0 = f(10) = f(2 \cdot 5) = f(2) + f(5)$. Mivel pedig $f(2)$ és $f(5)$ nemnegatív egészek, azért csak $f(2) = f(5) = 0$ lehetséges. Minden n pozitív szám előáll $2^k \cdot 5^l \cdot b$ alakban, ahol b relatív prím 10-hez. Az ilyen helyeken a függvény értéke az imént kapott értékek segítségével

$$f(n) = kf(2) + lf(5) + f(b) = f(b)$$

Mivel pedig b olyan páratlan szám, amely nem osztható 5-tel, azért 10-es maradéka csak ± 1 vagy ± 3 lehet. Négyzetének 10-es maradéka ekkor szükségképpen ± 1, negyedik hatványáé pedig biztosan $+1$. Ez azt jelenti, hogy $3b^4 = 10m + 3$ valamilyen m pozitív egészre, tehát $f(3) + 4f(b) = 0$, és mivel mindkét tag nemnegatív egész, azért ez $f(b) = 0$-t jelenti bármely b-re. A feltételeknek tehát csak a konstans 0 függvény tesz eleget.

---

3. feladat: Bizonyítandó, hogy $x^n y^n + 1$ ($n \geq 1$ pozitív egész) nem állítható elő két olyan polinom szorzataként, amelyek közül az egyik csak az x-et, a másik csak az y-t tartalmazza!

Oláh György (Révkomárom)

3. feladat I. megoldása: Indirekten bizonyítunk. Tegyük fel, hogy van két ilyen polinom, legyenek ezek $P(x)$ és $Q(y)$! Ekkor

$$x^n y^n + 1 = P(x) \cdot Q(y)$$

Helyettesítsünk be $x = y = 0$-t ebbe az egyenletbe, azt kapjuk, hogy $P(0) \cdot Q(0) = 1$, tehát P konstans tagja a, Q-é pedig $\frac{1}{a}$, ahol a valós, nem 0 paraméter.

Vezessük most be a következő jelöléseket:

$$P(x) = xP_1(x) + a,\ Q(y) = yQ_1(y) + \frac{1}{a},$$

P_1 és Q_1 polinomokkal. Ez azt jelenti, hogy

$$x^n y^n + 1 = (xP_1(x) + a)\left(yQ_1(y) + \frac{1}{a}\right).$$

Ide $x = 0$-t helyettesítve $ayQ_1(y) + 1 = 1$, ami azt jelenti, hogy $yQ_1(y) = 0$ bármely y-ra. Igaz továbbá az is, hogy $xP_1(x)$ is azonosan 0, ez hasonló módszerekkel bizonyítható. Ez viszont ellentmondásban van azzal, hogy a feltételi egyenlőség teljesüléséhez mindkét polinomnak legalább elsőfokúnak kell lennie.

---

4. feladat: Az ABC háromszög oldalai a, b, c, az a oldallal szemközti szög α. Igazoljuk, hogy ha

1) α hegyesszög, akkor $\sin\frac{\alpha}{2} \geq \frac{a}{\sqrt{2(b^2+c^2)}}$

2) α hegyesszög, akkor $\frac{a}{\sqrt{2(b^2+c^2)}} \leq \sin\frac{\alpha}{2} \leq \frac{a}{b+c}$

Bencze Mihály (Brassó)

4. feladat I. megoldása: Mivel α egy háromszög belső szöge, azért $\sin\frac{\alpha}{2}$ mindenképpen pozitív, ezért az 1. egyenlőtlenséget négyzetre emelhetjük:

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} \leq \frac{a^2}{b^2 + c^2}$$

Használjuk fel azt, hogy $2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$ (ez bizonyítható, ha átrendezzük $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$ alakra). Alkalmazzuk továbbá $\cos\alpha$ felírásához a koszinusztételt. Ekkor a következő ekvivalens egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{b^2 + c^2} \leq \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$b^2 + c^2 \geq 2bc$, ez átrendezéssel könnyen bizonyítható. Az egyenlőtlenség így pontosan akkor teljesül, ha $b^2 + c^2 - a^2 \geq 0$, tehát α hegyesszög. Ha α tompaszög, akkor fordított irányú az egyenlőtlenség, ez éppen a 2. egyenlőtlenség bal oldalát jelenti.

Be kell bizonyítanunk még a 2. egyenlőtlenség jobb oldalát. Ehhez húzzunk párhuzamost C-n át α szögfelezőjével, legyen ennek metszéspontja az AB egyenessel D! Most alkalmazzuk a szinusztételt a BCD háromszögre:

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right)} = \frac{a}{b + c}$$

Mivel pedig $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right)$ 0 és 1 közé esik, azért a 2. egyenlőtlenség jobb oldala is teljesül.

---

5. feladat: Állapítsuk meg az

$$\frac{r_a^2 + r_b^2 + r_c^2}{s^2}$$

tört minimumát, ahol r_a, r_b, r_c a háromszög a, b, c oldalához hozzáírt körök sugara, s pedig a háromszög kerületének fele!

Kubatov Antal (Kaposvár)

5. feladat I. megoldása: Legyen a hozzáírt kör érintési pontja az AB egyenessel E_1, a BC egyenessel E_2, az AC egyenessel E_3. Egy pontból egy körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők, tehát

$$BE_1 = BE_2,\ CE_2 = CE_3,\ AE_1 = AE_3$$

ebből pedig $AE_1 + AE_3 = 2s$ következik. Ez azt jelenti, hogy $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r_a}{s}$. Teljesen hasonló módon $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{r_b}{s}$ és $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{r_c}{s}$. Ebből következően

$$\frac{r_a^2 + r_b^2 + r_c^2}{s^2} = \left(\frac{r_a}{s}\right)^2 + \left(\frac{r_b}{s}\right)^2 + \left(\frac{r_c}{s}\right)^2 = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} \geq$$

$$\geq \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 1$$

Az átalakításoknál felhasználtuk az $a^2 + b^2 + c^2 \leq ab + bc + ac$ egyenlőtlenséget továbbá a bármely háromszög szögeire érvényes

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 1$$

összefüggést. Ez azt jelenti, hogy a törtünk értéke legalább 1, de azt az értéket szabályos háromszögben fel is veheti, tehát a tört értékének minimuma 1 lesz.

---

6. feladat: Adott az

$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + \frac{2}{n+1}$$

rekurziót teljesítő sorozat, ahol $1{,}5 \leq u_1 \leq 2$. Igazoljuk, hogy $1 < u_n < 1 + \frac{1}{n-1}$, ha $n \geq 2$

András Szilárd (Kolozsvár)

6. feladat I. megoldása: Teljes indukcióval igazoljuk, hogy $\frac{2k+3}{2k+2} \leq u_{2k+1} \leq \frac{2k+2}{2k+1}$. $k = 0$-ra ez igaz lesz. Tegyük fel, hogy igaz k-ra és igazoljuk $k+1$-re! A rekurziós definíció szerint

$$u_{2k+3} = \frac{1}{u_{2k+2}} + \frac{2}{2k+3} = \frac{1}{\frac{1}{u_{2k+1}} + \frac{2}{2k+2}} + \frac{2}{2k+3}$$

Az indukciós feltevés szerint

$$\frac{2k+1}{2k+2} + \frac{2}{2k+2} \leq \frac{1}{u_{2k+1}} + \frac{2}{2k+2} \leq \frac{2k+2}{2k+3} + \frac{2}{2k+2} = \frac{2k^2+6k+5}{(k+1)(2k+3)} \tag{1}$$

Ez azt jelenti, hogy $u_{2k+3} \leq \frac{2k+2}{2k+3} + \frac{2}{2k+3} = \frac{2k+4}{2k+3}$, továbbá igaz lesz az is, hogy $\frac{(k+1)(2k+3)}{2k^2+6k+5} + \frac{2}{2k+3} \leq u_{2k+3}$ Ez azt jelenti, hogy elegendő belátni, hogy $\frac{2k+5}{2k+4} \leq \frac{(k+1)(2k+3)}{2k^2+6k+5} + \frac{2}{2k+3}$, ez pedig egyszerű számolással igazolható.

Ez azt jelenti, hogy páratlan n-ekre a feladat állítása igaz, hiszen

$$1 < \frac{2k+3}{2k+2} \leq u_{2k+1} \leq \frac{2k+2}{2k+1} < 1 + \frac{1}{2k}$$

$n = 2k+2$-re is igaz lesz az állítás, hiszen (1) alapján

$$1 < \frac{2k+3}{2k+2} \leq u_{2k+2} \leq \frac{2k+2}{2k+3} + \frac{1}{k+1} < 1 + \frac{1}{2k+1}$$