VI. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Kaposvár, 1997. ápr. 2-6.

11. osztály

1. feladat: Egy nem állandó számtani sorozat első két tagjának összege és szorzata egyenlő egymással. Az első három tag összege és szorzata is egyenlő. Határozzuk meg a sorozat első négy tagjának az összegét!

Kovács Béla (Szatmárnémeti)

1. feladat I. megoldása: Jelöljük a sorozat tagjait a szokásos módon! Vezessük be az $a_1 = a$ jelölést. A feltételünk szerint $a \neq a_2$, $a + a_2 = aa_2$, és $aa_2a_3 = a + a_2 + a_3$. Ezekből az egyenlőtlenségekből láthatjuk, hogy $a \neq 0$ és $a \neq 1$, valamint hogy

$$a_2 = \frac{a}{a-1}, \ a_3 = \frac{a^2}{a^2 - a + 1} = \frac{2a}{a-1}$$

A számtani sorozat tulajdonságai alapján $a + a_3 = 2a_2$, ami az előzőekkel egybevetve azt jelenti, hogy $a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = 2$. Ismert azonosság szerint ez $(a-1)^3 = 2$ alakba írható, amiből $a = 1 + \sqrt[3]{2}$. Így tehát a képletek alapján az első négy tag:

$$a_1 = 1 + \frac{1 + \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}, \ a_3 = \frac{3}{1 + \sqrt[3]{2}}, \ a_4 = 2a_3 - a_2 = \frac{6}{1 + \sqrt[3]{2}} - 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Ezeket összeadva pedig az első négy tag összege $1 + \sqrt[3]{2} + \frac{9}{1+\sqrt[3]{2}}$.

---

2. feladat: A konvex n oldalú sokszöget vágjuk szét háromszögekre. Minden háromszögbe írjunk kört. Bizonyítsuk be, hogy a körök sugarainak összege nagyobb vagy egyenlő a $\frac{2T}{k}$ hányadosnál, ahol T az n oldalú sokszög területe, k pedig a kerülete!

Szabó Magda (Szabadka)

2. feladat I. megoldása: Jelöljük a keletkezett háromszögek számát m-mel! Az i-edik háromszög területe legyen t_i, kerülete k_i, a beírható kör sugara r_i! Ismert összefüggés alapján $r_i = \frac{2t_i}{k_i}$. Minden háromszög kerülete legfeljebb akkora lehet, mint a sokszögé, így $\frac{2t_i}{k_i} \geq \frac{2t_i}{k}$ bármely i-re. A körök sugarainak összege tehát

$$\sum_{i=1}^{m} r_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{2t_i}{k_i} \geq \sum_{i=1}^{m} \frac{2t_i}{k} = \frac{2T}{k},$$

és éppen ezt akartuk bizonyítani.

---

3. feladat: Adott a síkon n darab pont, amelyek között nincs három, amely egy egyenesre esne, és nincs négy, amely egy körön lenne. Minden ponthármas köré kört írunk. Mutassuk meg, hogy a körök között lévő egységsugarú körök száma legföljebb $\frac{n(n-1)}{3}$.

Róka Sándor (Nyíregyháza)

3. feladat I. megoldása: Bármely két adott pontra a síkon legfeljebb két egységsugarú kör illeszthető, mivel minden közös kör középpontja rajta van a két pont által alkotott szakasz felezőmerőlegesén, és ezen csak két megfelelő pont lehet.

Így ha bármely két pontot kiválasztjuk, az összesen $\binom{n}{2}$ pontpár, ez azt jelenti, hogy legfeljebb $2 \cdot \binom{n}{2}$ egységsugarú kört rajzolhatunk meg. Ebben az esetben viszont minden kört háromszor számoltunk, tehát az egységsugarú körök száma legfeljebb

$$\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{3},$$

és ezt kellett belátnunk.

---

4. feladat: Az $f(x)$ másodfokú polinomot helyettesítjük az

$$x^2 f\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

vagy az

$$(x-1)^2 \cdot f\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

polinomok közül az egyikkel. Az $x^2+1997x+1998$ polinomból megkaphatjuk-e ilyen műveletek segítségével az $x^2+1996x+1997$ polinomot?

Orosz olimpiai feladat alapján Kubatov Antal (Kaposvár)

4. feladat I. megoldása: Paraméterezzük meg a polinomot: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Nézzük meg, mik lesznek a helyettesítés során kapott polinomok:

$$\begin{aligned} x^2 f\left(1+\frac{1}{x}\right) &= x^2\left(a\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 + b\left(1+\frac{1}{x}\right)+c\right) = \\ &= a(x+1)^2 + bx(x+1) + cx^2 = (a+b+c+)x^2 + (2a+b)x + a \\ (x-1)^2 f\left(\frac{1}{x-1}\right) &= x^2\left(a\left(\frac{1}{x-1}\right)^2 + b\left(\frac{1}{x-1}\right)+c\right) = \\ &= a - b(x-1) + c(x-1)^2 = cx^2 - (2c+b)x + a + b + c \end{aligned}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy mindkét polinom diszkriminánsa megegyezik az eredetiével. Mivel pedig a feladatban szereplő két polinom diszkriminánsa nem ugyanannyi, azért ilyen átalakításokkal nem kaphatjuk meg egyiket a másikból.

---

5. feladat: Bizonyítsuk be, hogy érvényes: $a^2(-u^2+v^2+w^2)+b^2(u^2-v^2+w^2)+c^2(u^2+v^2-w^2) \geq 16Tt$, ahol t az a,b,c oldalú háromszög, T pedig az u,v,w oldalú háromszög területe. Mikor áll fenn az egyenlőség?

Oláh György (Révkomárom)

5. feladat I. megoldása: Legyen az első háromszögben a c oldallal szemközti szög γ, a másikban a w-vel szemközti szög ϕ. A háromszög trigonometrikus területképlete alapján $t = \frac{ab\sin\gamma}{2}$, $T = \frac{uv\sin\gamma}{2}$. Alkalmazzuk most a koszinusztételt!

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma;\ u^2+v^2-w^2 = 2uv\cos\phi$$

Ha ezeket felhasználjuk, azt kapjuk az eredeti egyenlőtlenségből:

$$a^2(2v^2 - 2uv\cos\phi) + b^2(2u^2 - 2uv\cos\phi) + (a^2+b^2-2ab\cos\gamma)2uv\cos\phi \geq 4abuv\sin\phi$$

Ezt ekvivalensen átalakítva

$$2(a^2v^2 - b^2u^2) - 4abuv(\cos\gamma\cos\phi + \sin\gamma\sin\phi) \geq 0$$

Ezt pedig 2-vel leosztva és teljes négyzetté alakítva (felhasználva, hogy a bal oldal második tagjának második tényezője $\cos(\gamma-\phi)$, és hozzáadva $2abuv - 2abuv = 0$-t a bal oldalhoz)

$$(av-bu)^2 + 2abuv\left(1-\cos(\gamma-\phi)\right)$$

Mivel pedig $\cos(\gamma - \phi) \leq 1$ mindig teljesül, azért ez is igaz lesz, és mivel ekvivalens az eredeti egyenlőtlenségünkkel, azért azt is bebizonyítottuk. Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha mindkét tag a bal oldalon 0, tehát

$$av = bu, \ \cos(\gamma - \phi) = 1$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $\gamma = \phi$ és $\frac{a}{b} = \frac{u}{v}$, tehát akkor lesz egyenlőtlenség, ha a két háromszögünk hasonló.

---

6. feladat: Igazoljuk, hogy a $|\sin n|$ alakú számok halmazának (n nem negatív egész) van legalább két olyan eleme, amelyek kisebbek $\frac{1}{1000}$-nél!

Dáné Károly (Marosvásárhely)

6. feladat I. megoldása: A 0 eleme a halmaznak ($\sin 0 = 0$), ezért elég egyetlen további megfelelő n-et találni. Mivel bármely n, k pozitív egészre $|\sin n| = |\sin(n - k\pi)|$, azért elég igazolni, hogy vannak olyan n, k pozitív egészek, melyeknél $|n - k\pi| < \frac{1}{1000}$.

Ennek belátásához tekintsük az $\{\pi\}, \{2\pi\}, \dots, \{1001\pi\}$ számokat. Ezek mind különbözők lesznek, mert bármelyik kettő egyenlősége esetén $p\pi - [p\pi] = q\pi - [q\pi]$ állna fenn, ami viszont lehetetlen, mert ekkor $(p - q)\pi$ egész lenne, tehát π racionális lenne. $\{\pi\}, \{2\pi\}, \dots, \{1001\pi\}$ mindegyike 0 és 1 közé esik. Így van köztül kettő, amelyek különbsége abszolútértékben kisebb, mint $\frac{1}{1000}$. Legyenek ezek p és q ! Ekkor

$$|[p\pi] - [q\pi] - (p - q)\pi| < \frac{1}{1000}$$

Ebben az esetben pedig $n = [p\pi] - [q\pi]$, $k = q - p$ megfelelő értékek lesznek, $|n - k\pi| < \frac{1}{1000}$.