VI. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Kaposvár, 1997. ápr. 2-6.

10. osztály

1. feladat: Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = (m-1)x^2 - 2(m-1)x + m - 5$ függvény grafikonja az m valós paraméter bármely értékére ugyanazon a ponton halad keresztül. Határozzuk meg ennek a pontnak a koordinátáit!

Zolnai Irén (Újvidék)

1. feladat I. megoldása: Ha van egy olyan x_0 hely, amelyre az $f(x_0)$ függvényérték állandó, akkor

$$f(x_0) = (m+1)x_0^2 - 2(m-1)x_0 + m - 5 = m(x_0^2 - 2x_0 + 1) + x_0^2 + 2x_0 - 5$$

miatt $x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0$ szükséges, ami $x_0 = 1$-et jelenti, ezen a helyen pedig a függvény m értékétől függetlenül -2-t vesz fel, tehát az $(1; -2)$ ponton minden ilyen alakú függvény grafikonja áthalad.

---

2. feladat: Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja A_1, AB oldalának felezőpontja C_1, S a háromszög súlypontja. Mekkorák a háromszög szögei, ha $CAA_1\angle = CC_1A_1\angle$, $A_1SC_1\angle = BAC\angle + ACB\angle$?

Balázsi Borbála (Beregszász)

2. feladat I. megoldása: Jelöljük a CAA_1 szöget α-val! Ekkor a feladat állítása szerint $CC_1A\angle = \alpha$, és mivel a háromszög középvonala, A_1C_1 párhuzamos a szemközti oldallal, azért $ACC_1\angle = AA_1C_1\angle = \alpha$ is teljesül, váltószögek jelentkeznek. Az ACC_1 és AA_1C_1 szögek így megegyeznek, tehát C és A_1 is rajta vannak az AC_1 α szögű látókörívén, vagyis

$$AC_1A_1C_1$$

húrnégyszög, de mivel trapéz, azért egyenlőszárú is, tehát a háromszög is egyenlőszárú lesz. Továbbá a körbe írhatóság miatt $C_1AA_1\angle = C_1CA_1\angle$, mivel ugyanahhoz az ívhez tartozó kerületi szögek. Jelöljük a nagyságukat β-val! Az $A_1MC_1\angle = BAC\angle + ACB\angle$ egyenlőség mindkét oldalához hozzáadva az ABC szöget, azt kapjuk, hogy $A_1MC_1\angle + ABC\angle = 180°$ a háromszög szögösszege miatt, és mivel $A_1MC_1\angle = 180° - 2\alpha$, azért ez $ABC\angle = 2\alpha$-t jelenti. Ez azt jelenti, hogy a háromszög szögösszege $4\alpha + 2\beta = 180°$, amiből $2\alpha + \beta = 90°$ következik. Ekkor viszont az AC_1C háromszögnek C_1-nél derékszöge van, ami azt jelenti, hogy a C-ből behúzott súlyvonal egyben magasság is, tehát $AC = BC$, ez viszont $AB = BC$-vel együtt azt jelenti, hogy a háromszög szabályos, vagyis minden szöge $60°$-os lesz.

---

3. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha p és q 5-nél nagyobb prímszám, akkor $p^4 - q^4$ osztható 60-nal!

Oláh György (Révkomárom)

3. feladat I. megoldása: Bebizonyítjuk, hogy a kifejezés osztható 3-mal, 4-gyel és 5-tel is. Ehhez először bontsuk szorzattá:

$$p^4 - q^4 = (p^2 - q^2)(p^2 + q^2)$$

Mivel a számok páratlanok, azért mindkét tényező páros, tehát a szorzat osztható lesz 4-gyel. Egyik szám sem osztható 3-mal, tehát a négyzetük 3-as maradéka csak 1 lehet, ami azt jelenti, hogy $p^2 - q^2$ osztható lesz 3-mal. Teljesen hasonló módon mindkét szám négyzetének 5-ös maradéka vagy 4, vagy 1, így a négyzetek összege és különbsége közül valamelyik biztosan osztható lesz 5-tel, ez pedig azt jelenti, hogy $p^4 - q^4$ osztható 3-mal, 4-gyel és 5-tel is, ami viszont együttesen azt jelenti, hogy osztható lesz 60-nal, és éppen ezt kellett bizonyítanunk.

---

4. feladat: Legyen $n > 1$ természetes szám. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a pozitív természetes számok halmazán:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2x_3 \dots x_n &= 1997 \\ x_2 + x_1x_3 \dots x_n &= 1997 \\ &\vdots \\ x_n + x_1x_2 \dots x_{n-1} &= 1997 \end{aligned}$$

Veres Pál (Miskolc)

4. feladat I. megoldása: $n = 2$-re az egyenletrendszer $x_1+x_2 = 1997$ formára egyszerűsödik, ennek megoldása: $\{(x_1; 1997 - x_1)|x_1 \in 1, 2, \dots, 1996\}$. Amennyiben $n > 2$, és van x_i, x_j, amelyek különbözők, akkor

$$x_i + x_1x_2 \dots x_{i-1}x_{i+1} \dots x_n = x_j + x_1x_2 \dots x_{j-1}x_{j+1} \dots x_n$$

azt jelenti, hogy átrendezve

$$(x_i - x_j)(x_1 \dots x_{i-1}x_{i+1} \dots x_{j-1}x_{j+1} \dots x_n - 1) = 0$$

Feltettük, hogy $x_i \neq x_j$, azért az összes x_k, ahol $k \neq i, j$, egyenlő 1-gyel, hiszen természetes számok. Az egyenletrendszer ekkor

$$x_i + x_j = 1997, \quad 1 + x_ix_j = 1997$$

formára egyszerűsödik, aminek két egész megoldása van: $x_i = 1996, x_j = 1$ és $x_i = 1, x_j = 1996$. Tehát a megoldás egy tetszőleges eleme 1996, a többi 1.

Ha minden elem egyenlő, akkor az összes egyenlet (x-szel jelölve a közös értéket) $x + x^{n-1} = 1997$ alakú lenne, tehát $x(1 + x^{n-2}) = 1997$ alakú, de mivel az 1997 prímszám, ezért ez csak $x = 1$ vagy $x = 1997$ esetén lehetne, igaz, ezek az értékek azonban könnyen láthatóan nem lesznek megfelelőek.

---

5. feladat: Jelölje M az $ABCD$ húrnégyszög átlóinak metszéspontját, valamint E, F, G, H az M merőleges vetületeit az AB, BC, CD, DA oldalakra; föltesszük, hogy ezek az oldalak belső pontjai. Igazoljuk, hogy M az $EFGH$ négyszög oldalait érintő kör középpontja. Mikor lesz $EFGH$ húrnégyszög?

Bencze Mihály (Brassó)

5. feladat I. megoldása: Mivel merőleges vetületeket vettünk, azért bármely csúcs a belőle kiinduló oldalakon lévő vetületekkel és az M ponttal húrnégyszöget alkot, a körülírt kör átmérője a csúcsot M-mel összekötő szakasz. Így mivel azonos ívhez tartozó kerületi szögek, azért egyenlők lesznek egymással az FBM és FEM, valamint az MEH és az MAH szögek. Mivel $ABCD$ húrnégyszög, azért ugyanilyen okokból $CBD\angle = CAD\angle$, tehát az előbbi összefüggés miatt az FEM és az MEH szögek is meg fognak egyezni. Így tehát EM felezi a HEF szöget. Ugyanígy kaphatjuk, hogy M az $EFGH$ négyszög belső szögfelezőinek metszéspontja, ami azt jelenti, hogy $EFGH$ érintőnégyszög és a beírt kör középpontja éppen M.

Az imént kaptuk, hogy $HEF\angle = 2MBF\angle$, és ugyanígy $HGF\angle = 2MCB\angle$. Ez azt jelenti, hogy $EFGH$ pontosan akkor húrnégyszög, ha $2MBF\angle + 2MBC\angle = 180°$, ami pedig azt jelenti, hogy $MBF\angle + MBC\angle = 90°$. Ez pedig azt jelenti, hogy az $ABCD$ négyszög átlói merőlegesek egymásra.

---

6. feladat: Van egy igen érdekes zsebszámológépünk, amely mindenféle kiinduló értéket képes fogadni, de ennek bevitele után már csak összeadni, kivonni és reciprokot képezni tud, és mindig pontos értéket ad. A gépnek tetszőlegesen sok memóriája van, amelybe a fenti műveletek végzése közben bármilyen érték bevihető, illetve előhívható onnan. Tehát a számolások során a kiindulási számot és minden részeredményt többször is felhasználhatunk, más számot azonban nem. Ilyen feltételek mellett megkaphatjuk-e az 1-et végeredményül, ha a kiindulási szám

a) $\sqrt{19} + 97$

b) $\sqrt{19}+\sqrt{97}$?

Kiss Sándor (Nyíregyháza)

6. feladat I. megoldása: a) Vegyük a szám reciprokát és gyöktelenítsük a nevezőt:

$$\frac{1}{\sqrt{19}+97}=\frac{97-\sqrt{19}}{97^2-19}=\frac{97-\sqrt{19}}{9390}$$

Ha ezt összeadjuk 9390-szer, $97-\sqrt{19}$-et kapunk. Ehhez hozzáadva az eredeti számunkat 194 az eredmény, amelynek reciprokát 194-szer véve 1-et kapunk, így találtunk egy megfelelő eljárást.

b) Tekintsük az $a\cdot\sqrt{19}+b\cdot\sqrt{97}(a,b\in\mathbb{Q})$ alakú számokat! Könnyen belátható, hogy két ilyen szám összege, különbsége és reciproka is ilyen alakú. Ez viszont azt jelenti, hogy ezt a számot megadva kiindulásként csak ilyen alakú számokat kaphatunk, ami pedig azt jelenti, hogy mivel az 1 nem áll elő ilyen formában, azért az 1-hez sosem juthatunk el.