# *VI. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny*

*Kaposvár, 1997. ápr. 2-6.*

## 9. osztály

**1. feladat:** Bizonyítsuk be, hogy $1997x^2 + 1998x + 1995$ semmilyen $x$ egész szám esetén sem lesz teljes négyzet!

*Oláh György (Révkomárom)*

**1. feladat I. megoldása:** A kifejezés értékének 4-es maradéka megegyezik megegyezik $x^2+2x+3$-éval, mivel a különbség formálisan $1996x^2 + 1996x + 1992$, ami nyilván osztható 4-gyel. $x^2 + 2x + 3$ 4-es maradéka páros $x$ esetén 3, páratlan $x$ esetén pedig 2. Egy négyzetszám 4-es maradéka ezzel szemben csak 0 vagy 1 lehet, ez pedig azt jelenti, hogy a kifejezésünk nem lehet négyzetszám.

---

**2. feladat:** Óránk éppen egy 4 és 5 óra közötti időpontot mutat. Egy 7 és 8 óra közötti pillanatban a két mutató az előbbi helyzethez képest helyet cserélt. Hány óra volt a két időpontban?

*Bogdán Zoltán (Cegléd)*

**2. feladat I. megoldása:** 4 órától az első időpontig a kismutató megtett $x$ osztásnyi utat a számlapon, a nagymutató pedig a 7-es jelzéshez képest $y$ osztásnyit. Mivel a nagymutató 12-szer olyan gyorsan mozog, mint a kicsi, és ismerjük a 4, illetve 7 órakor fennálló kezdőpozíciókat, azért

$$12x = 7 + y$$

és teljesen hasonló módon

$$12y = 4 + x$$

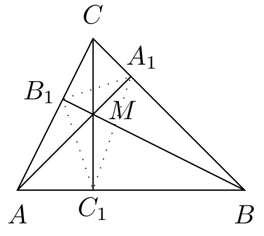
Ezt a lineáris egyenletrendszert megoldva $x = \frac{8}{13}$ és $y = \frac{5}{13}$. Ez pedig azt jelenti, hogy az első időpont $4\frac{8}{13}$, a második pedig $7\frac{5}{13}$ óra volt.

---

**3. feladat:** Legyen $d_1, d_2, d_3$ egy hegyesszögű háromszög magasságpontját a csúcsokkal összekötő három szakasz. Igazoljuk, hogy $d_1 + d_2 + d_3 > k$, ahol $k$ a magasságok talppontjai által meghatározott háromszög kerületét jelöli.

*Árokszállási Tibor és Eszter (Paks)*

**3. feladat I. megoldása:** Vezessük be a következő jelöléseket: $d_1 = MC$, $d_2 = MB$, $d_3 = MA$. A Thalész-tétel szerint $MC$ a $CA_1MB_1$ négyszög köré írt kör átmérője, mivel az $MB_1C$ és $MA_1C$ szögek is derékszögek.




$A_1B_1$ ugyanennek a körnek egy húrja. A háromszög hegyesszögű, ezért $d_1 > A_1B_1$ (derékszögű háromszögben esetleg lehetne egyenlő vele). Teljesen hasonló érveléssel bizonyíthatjuk, hogy $d_2 > A_1C_1$ és $d_3 > B_1C_1$. Összeadva a három egyenlőtlenség megfelelő oldalait azt kapjuk, hogy

$$d_1 + d_2 + d_3 > A_1B_1 + A_1C_1 + B_1C_1 = k,$$

ez pedig nem más, mint az állítás, amelyet bizonyítanunk kellett.

---

**4. feladat:** Bizonyítsuk be, hogy $111\ldots1 - 222\ldots2$ négyzetszám (az $111\ldots1$ szám $2n$ jegyű, a $222\ldots2$ $n$ jegyű)!

*Neubauer Ferenc (Munkács)*

**4. feladat I. megoldása:** A két szám a "csupa kilences" számok zárt alakjából a következőképp írható fel:

$$\frac{1}{9}(10^{2n}-1)-\frac{2}{9}(10^{n}-1)=\frac{1}{9}(10^{2n}-2\cdot10^{n}+1)=\left(\frac{1}{3}(10^{n}-1)\right)^{2}$$

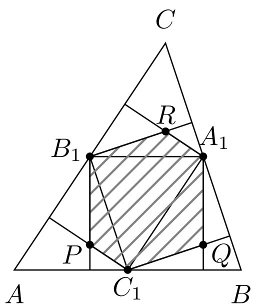
Mivel pedig a jobb oldalon egy "csupa kilences" szám harmadát emeltük négyzetre, azért az is négyzetszám lesz, ezzel az állítást beláttuk.

---

**5. feladat:** Egy hegyesszögű háromszög területe $t$. Minden oldal felezőpontjából merőlegest állítunk a másik két oldalra. Mekkora a hat merőleges által közrezárt konvex hatszög területe?

*Róka Sándor (Nyíregyháza)*

**5. feladat I. megoldása:** Tudjuk, hogy a háromszög középvonalai a háromszöget négy egybevágó háromszögre bontják, amelyek az eredetinek $\frac{1}{2}$ arányú kicsinyítései.




A meghúzott merőlegeseink ezeknek a háromszögeknek a magasságai. Az egybevágóság miatt a $B_1PC$ háromszög egybevágó az $A_1B_1C_1$ háromszögben a $B_1C_1$ oldalra rajzolt, a magasságpontot harmadik csúcsként tartalmazó háromszöggel. Ugyanez mondható el $A_1B_1C_1$ többi oldaláról is. Ez azt jelenti, hogy a $PB_1C_1$, $QA_1C_1$, $RB_1A_1$ háromszögek összességében akkora területűek, mint az $A_1B_1C_1$ háromszög, tehát a feladatban szereplő hatszög területe $\frac{t}{2}$ lesz.

---

**6. feladat:** Léteznek-e olyan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számok, amelyekre teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$\begin{aligned}
a_1(1+a_2a_3\ldots a_{n+2}a_{n-1}) &> 1+a_1a_2\ldots a_n\\
a_2(1+a_3a_4\ldots a_{n-1}a_n) &> 1+a_1a_2\ldots a_n\\
&\vdots\\
a_n(1+a_1a_2\ldots a_{n-3}a_{n-2}) &> 1+a_1a_2\ldots a_n?
\end{aligned}$$

*Bencze Mihály (Brassó)*

**6. feladat I. megoldása:** Rendezzük át az egyenlőtlenségeket!

$$a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}(1-a_n) > 1-a_1$$

$$a_2a_3\dots a_n(1-a_1) > 1-a_2$$
$$\vdots$$
$$a_na_1\dots a_{n-2}(1-a_{n-1}) > 1-a_n$$

Ha $a_1 < 1$ lenne, az $1 - a_1 > 0$-t jelentené, tehát az első egyenlőtlenségből az összes szám pozitív volta miatt $a_n < 1$ következne. Hasonló módon adódik, hogy bármely $k$-ra $a_k < 1$. Az egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeszorozva ez azt jelenti, hogy $(a_1a_2\dots a_n)^{n-1} > 1$. Ez viszont ellentmondásban van azzal, hogy a számok 1-nél határozottan kisebbek.

Hasonló módon $a_1 > 1$ esetén minden $k$-ra $a_k > 1$ , azonban $(a_1a_2a_3\dots a_n)^{n-1} < 1$, ami nyilvánvaló ellentmondás.

Ha pedig $a_1 = 1$, akkor az első egyenlőtlenségből $a_n < 1$, $a_{n-1} < 1$, és így tovább, $a_1$ kivételével minden változó 1-nél kisebbnek adódik, ami viszont összeszorozva ismét ellentmondáshoz vezet. Ez pedig azt jelenti, hogy nincsenek megfelelő számok a feladat egyenlőtlenségeihez.