V. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Székelyudvarhely, 1996. márc. 29-ápr. 2.

12. osztály

1. feladat: Az ABC egyenlőszárú háromszögben ($AB = AC$) az AB és AC szárakon felvesszük a $D \in AB$ illetve $E \in AC$ pontot úgy, hogy

$$\left(\frac{\mathrm{Ker}(ADE)}{\mathrm{Ker}(ABC)}\right)^2 = \frac{\mathrm{Ter}(ADE)}{\mathrm{Ter}(ABC)}$$

Igazoljuk, hogy DE párhuzamos BC-vel.

Dáné Károly, Péter András (Marosvásárhely, Arad)

2. feladat: Határozzuk meg a következő halmaz elemeinek számát: $A_n = \{(x, y) \,|\, x \neq y \in N, x, y \in [F_n, F_{n+2}]$ és $\exists k \in N : x + y = F_k\}$ (bármely rögzített n természetes szám esetén F_n a Fibonacci sorozat n-edik tagja, $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$).

Bege Antal (Kolozsvár)

3. feladat: Mennyi maradékot kapunk, ha az $n^{n+1} + (n+1)^n$ természetes számot elosztjuk $n(n+1)$-el?

Kovács Béla, Olosz Ferenc (Szatmárnémeti)

4. feladat: Legyen $P(x)$ egy valós együtthatós n-ed fokú polinom. Igazoljuk, hogy a $P(P(P(x))) = 0$ egyenletnek nem lehet pontosan $n^3 - n^2 + 1$-szeres gyöke.

András Szilárd, Oláh György (Csíkszereda, Révkomárom)

5. feladat: Egy körvonalat 30 ponttal 30 ívdarabra osztunk fel úgy, hogy az ívdarabok közül 10-nek a hossza 1, 10-nek a hossza 2 és 10-nek a hossza 3. Bizonyítsuk be, hogy a felvett osztópontok között van legalább kettő, amelyek átmérősen ellentettek.

Reiman István (Budapest)

6. feladat: Adott az $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ folytonos függvény úgy, hogy

$$(f \circ f)(x) = \sqrt[n]{(x+1)^n + 1} \quad (n \geq 2).$$

Igazoljuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1.$$

Bencze Mihály (Brassó)