V. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Székelyudvarhely, 1996. márc. 29-ápr. 2.

12. osztály

1. feladat: Az ABC egyenlőszárú háromszögben ($AB = AC$) az AB és AC szárakon felvesszük a $D \in AB$ illetve $E \in AC$ pontot úgy, hogy

$$\left(\frac{\text{Ker}(ADE)}{\text{Ker}(ABC)}\right)^2 = \frac{\text{Ter}(ADE)}{\text{Ter}(ABC)}$$

Igazoljuk, hogy DE párhuzamos BC-vel.

Dáné Károly, Péter András (Marosvásárhely, Arad)

1. feladat I. megoldása: Jelöljük az AB és AC szakaszok közös hosszát a-val, a BC oldal hosszát b-vel, AD hosszát x-szel, AE-ét y-nal, az ADE és ABC háromszögek területarányát pedig k-val! A háromszög trigonometrikus területképlete szerint (az A-nál lévő szög mindkét háromszögben ugyanaz)

$$\frac{T_{ADE}}{T_{ABC}} = \frac{xy}{a^2} = k$$

Ebből $xy = a^2k$ adódik. A koszinusztétel szerint (az A-nál lévő szöget α-val jelölve)

$$DE^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha \geq 2xy - 2xy\cos\alpha = 2xy(1 - \cos\alpha)$$

Írjuk fel most az ADE háromszög területét, használjuk az imént kapott becslést, valamint a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget!

$$\begin{aligned} K_{ADE} &= x + y + DE \geq 2\sqrt{xy} + \sqrt{2xy(1-\cos\alpha)} = \\ &= 2a\sqrt{k} + 2a\sqrt{k}\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{k}(2a+b) = \sqrt{k}K_{ABC} \end{aligned}$$

Ami azt jelenti, hogy $\left(\frac{K_{ADE}}{K_{ABC}}\right)^2 \geq k$. Egyenlőség csak akkor állhat fönt, ha $x = y$, ez pedig, tekintve, hogy a háromszög egyenlőszárú, azt jelenti, hogy DE és BC párhuzamosak, és épp ezt kellett bizonyítanunk.

---

2. feladat: Határozzuk meg a következő halmaz elemeinek számát: $A_n = \{(x,y) \mid x \neq y \in N, x, y \in [F_n, F_{n+2}]$ és $\exists k \in N : x + y = F_k\}$ (bármely rögzített n természetes szám esetén F_n a Fibonacci sorozat n-edik tagja, $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$).

Bege Antal (Kolozsvár)

2. feladat I. megoldása: A Fibonacci-sorozat monoton nő, ezért bármely $n \in \mathbb{N}$-re $F_{n+1} < 2F_n$. A feltétel miatt $2F_n \leq x + y \leq 2F_{n+2}$, és ismét csak a monotonitás miatt $2F_{n+2} < F_{n+4}$. Így a feltétel szerint $x + y = F_{n+2}$, vagy pedig $x + y = F_{n+3}$. Vizsgáljuk külön a két esetet:

a) $x + y = F_{n+2}$. Ekkor $x_1 = x - F_n$ és $y_1 = y - F_n$ természetes értékű paraméterek bevezetésével

$$x_1 + y_1 = F_{n+2} - 2F_n = F_{n+2} - F_{n+1} + F_{n+1} - 2F_n = F_{n-1}$$

Ez pedig azt jelenti, hogy x_1 és y_1, így x és y megválasztására összesen $F_{n-1} + 1$ lehetőségünk van.

b) $x + y = F_{n+3}$. Itt az $x_1 = x - F_{n+2}$ és $y_1 = y - F_{n+2}$ paraméterekkel

$$x_1 + y_1 = 2F_{n+2} - x - y = F_{n+2} - (F_{n+3} - F_{n+2}) = F_{n+2} - F_{n+1} = F_n$$

Ezzel a feltétellel nyilvánvaló módon $F_n + 1$ számpárt választhatunk ki.

A két eset együtt $F_{n-1} + F_n + 2 = F_{n+1} + 2$ megoldást jelent, azonban néhány megoldást ($x = y$) kétszer számoltunk. Így ha F_{n-1} vagy F_n páros, akkor eggyel kevesebb eleme van a halmaznak. Teljes indukcióval igazolható, hogy a Fibonacci-sorozatnak pontosan azon elemei párosak, amelyek indexe 3-mal osztva 2 maradékot ad. Ez azt jelenti, hogy ha n 3-as maradéka 0 vagy 2, akkor a halmaz elemszáma $F_{n+1} + 1$, ha pedig n 3-as maradéka 1, akkor a halmaz elemszáma $F_{n+1} + 2$

---

3. feladat: Mennyi maradékot kapunk, ha az $n^{n+1}+(n+1)^n$ természetes számot elosztjuk $n(n+1)$-el?

Kovács Béla, Olosz Ferenc (Szatmárnémeti)

3. feladat I. megoldása: Az $x^{n+1} + (x + 1)^n$ polinomot eloszthatjuk az $x(x + 1)$ másodfokú polinommal, írjuk fel a maradékos osztást!

$$x^{n+1} + (x + 1)^n = x(x + 1)q(x) + ax + b,$$

ahol $q(x)$ egy $n - 1$-edfokú polinom, és a, b valós számok. $x = 0$ és $x = -1$ behelyettesítésével $b = 1$, $a = 1 + (-1)^n$. Ha most x helyébe a polinomban n-et írunk, akkor $n^{n+1} + (n + 1)^n$-nek az $n(n + 1)$-gyel való osztási maradéka páros n-re $n + 1$, páratlan n-re 1.

Megjegyzés: a polinomoknak ez egy kissé szabadon értelmezett felhasználása, de megtehető, hiszen a feladat kérdése mindig egy konkrét n-re vonatkozik, így a polinom fokszáma egy adott esetben mindig rögzített, és nem változik.

---

4. feladat: Legyen $P(x)$ egy valós együtthatós n-ed fokú polinom. Igazoljuk, hogy a $P(P(P(x))) = 0$ egyenletnek nem lehet pontosan $n^3 - n^2 + 1$-szeres gyöke.

András Szilárd, Oláh György (Csíkszereda, Révkomárom)

4. feladat I. megoldása: A feladatban szereplő egyenlet bal oldalán nyilván egy polinom áll, elegendő ennek a gyökeit vizsgálni. Jelöljük a $P(x)$ polinom gyökeit $x_1, x_2, \ldots, x_n$-nel! Ekkor a gyöktényezős alak

$$(P(P(x)) - x_1)(P(P(x)) - x_2)\ldots(P(P(x)) - x_n)$$

, tehát bármely i-re a $P(P(x)) - x_i$ polinom gyöke gyöke az eredeti polinomnak is.

Tegyük fel most, hogy x_0 a polinomunknak $(n^3 - n^2 + 1)$-szeres gyöke. Ha ez nem gyöke mindegyik $P(P(x))-x_i$ polinomnak, akkor legföljebb $n-1$ polinomnak gyöke, és mindegyiknek legfeljebb n^2-szeres (hiszen $P(P(x))$ fokszáma n^2 lesz). Mivel pedig $n^2(n - 1) < n^3 - n^2 + 1$, azért ez nem lehetséges, így x minden polinomnak gyöke, $P(P(x_0)) = x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Ha viszont a $P(P(x))-x_1$ polinom gyökei $a_1, a_2, \ldots, a_m$, rendre $t_1, t_2, \ldots, t_m$ -szeres multiplicitással, akkor ugyanezek lesznek a $P(P(P(x)))$ polinom gyökei is, mégpedig a_i $n \cdot t_i$-s multiplicitással. Így minden gyök többszörösségi foka osztható lesz n-nel, és így $n \geq 2$-re $(n^3 - n^2 + 1)$-es gyöke nem lehet a polinomunknak.

---

5. feladat: Egy körvonalat 30 ponttal 30 ívdarabra osztunk fel úgy, hogy az ívdarabok közül 10-nek a hossza 1, 10-nek a hossza 2 és 10-nek a hossza 3. Bizonyítsuk be, hogy a felvett osztópontok között van legalább kettő, amelyek átmérősen ellentettek.

Reiman István (Budapest)

5. feladat I. megoldása: A kör kerülete a feladat szövege szerint 60 egység. Vegyünk fel a 2-es és 3-as íveken újabb osztópontokat, amelyekkel így csupa 1 hosszúságú ívre bonthatjuk a kört. Bizonyítsunk indirekt módon! Tegyük fel, hogy nem volt két átellenes osztópont. Jelöljünk ki egy 2 hosszúságú AB ívet, legyen a felezőpontja P, ennek átellenes pontja (ilyen nyilván van) Q! A kisebbik AQ ív 29 egység hosszúságú, jelöljük az ezen eredetileg elhelyezkedő 1-es, 2-es, 3-as ívek számát x, y, z-vel! Ekkor $x+2y+3z = 29$. Mivel eredetileg nem voltak átellenes osztópontok, azért az AQ ív eredeti 1 hosszúságú íveivel szemben eredetileg 3 hosszúságú ívek 'középső' 1 hosszúságú része helyezkedett el, ebben jelöltünk ki két új osztópontot. Fordítva az AQ ív 3 hosszúságú íveinek belső osztópontjaival szemben a szemközti BQ íven 1 hosszúságú ív végpontjai vannak. Ez azt jelenti, hogy $x + z = 10$, hiszen összesen 10 db 3 hosszúságú és 10 db 1 hosszúságú ív volt. Ezekből a gondolatokból látszik az is, hogy az AB ív felezőpontjával szembeni Q eredetileg is osztópont volt, hiszen A-val és B-vel szemben nem lehetett osztópont, de ha a felezőponttal szemben nem lett volna, akkor az AB-vel szemközti ív 3-nál hosszabb lett volna.

Azt kaptuk tehát, hogy $x + z = 10$, tehát a felírt egyenletünk $10 + 2(y + z) = 29$, ami nyilván lehetetlen, hiszen a bal oldal páros, a jobb oldal pedig páratlan. Így ellentmondásra jutottunk, tehát kellett lennie legalább egy olyan osztópontnak, amellyel szemben szintén osztópont van.

---

6. feladat: Adott az $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ folytonos függvény úgy, hogy

$$(f \circ f)(x) = \sqrt[n]{(x+1)^n + 1} \quad (n \geq 2).$$

Igazoljuk, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1.$$

Bencze Mihály (Brassó)

6. feladat I. megoldása: Az f függvény szükségszerűen injektív, hiszen ha $0 < x_1 < x_2$, és $f(x_1) = f(x_2)$, akkor $f\left(f(x_1)\right) = f\left(f(x_2)\right)$, tehát $\sqrt[n]{(x_1+1)^n + 1} = \sqrt[n]{(x_2+1)^n + 1}$, ami viszont nem lehetséges, hiszen $x_1 < x_2$. Ez azt jelenti, hogy f injektív, és így a folytonosság miatt szigorúan monoton is. Mivel $f\left(f(x)\right)$-et értelmezzük, azért $f(x)$ minden x-re pozitív. Ha $f(x)$ határértéke a végtelenben véges lenne (jelöljük a-val), akkor $f\left(f(x)\right)$ határértéke a végtelenben $f(a)$ lenne, ami ellentmondana annak, hogy $\sqrt[n]{(x+1)^n + 1}$ határértéke a végtelenben végtelen. Mivel f szigorúan monoton nő, azért $f(x+1) > f(x)$, amiből

$$1 < \frac{f(x+1)}{f(x)} < \frac{f\left(\sqrt[n]{(x+1)^n + 1}\right)}{f(x)} = \frac{f\left(f\left(f(x)\right)\right)}{f(x)} = \frac{f\left(f(y)\right)}{y},$$

bevezetve az $f(x) = y$ jelölést. Tudjuk, hogy $x \to \infty$ esetén $y \to \infty$. Mivel pedig $f\left(f(y)\right)$ határértéke a végtelenben megegyezik $\frac{\sqrt[n]{(y+1)^n+1}}{y}$ határértékével, ami pedig láthatóan 1, így az állítást a fenti egyenlőtlenség segítségével a rendőrelv alapján igazoltuk.